

SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO DE CORRENTES GRAVITACIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADOS BASEADOS EM ARESTAS

Renato N. Elias^{1*}, Paulo Paraizo², Alvaro L. G. A. Coutinho¹

1: Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho
Programa de Engenharia Civil, COPPE,
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Caixa Postal 68516, Rio de Janeiro, RJ 21941-972, Brasil
e-mail: {renato, alvaro}@nacad.ufrj.br web: <http://www.nacad.ufrj.br>

2: Centro de Pesquisas da Petrobras (CENPES), Divisão de Produção,
Av. Horácio Macedo 850, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
e-mail: paraizo@petrobras.com.br

Palavras-chave: Correntes Gravitacionais, Elementos Finitos, Estrutura de dados baseadas em arestas

Resumo. *A modelagem do escoamento de correntes gravitacionais é importante em muitos problemas de ciência e engenharia. Este fenômeno ocorre em muitas escalas na natureza, tal como em correntes oceânicas, avalanches e escoamento de turbiditos [1]. A maioria das simulações de correntes gravitacionais é feita utilizando-se métodos de malhas estruturadas [2]. Entretanto, de acordo com Pain et al [3], existe uma forte tendência na utilização de métodos baseados em malhas não estruturadas dada a sua habilidade na representação e adaptação espacial. Neste trabalho a dinâmica das correntes gravitacionais é estudada utilizando um simulador computacional baseado no método dos elementos finitos [4].*

1. INTRODUÇÃO

Um escoamento é considerado como gravitacional quando ocorre o deslocamento horizontal de uma massa fluída devido uma diferença de densidade oriunda da diferença de temperatura, partículas em suspensão, salinidade ou propriamente da mistura de dois fluidos distintos [5]. A modelagem numérica de escoamentos gravitacionais tem se tornado de suma importância em áreas como engenharia, meteorologia, oceanografia e geologia por auxiliar na compreensão de uma ampla gama de fenômenos naturais ou não, representados pelo mesmo tipo de escoamento. A formação de ventos de tempestade, onde uma nuvem de ar frio se desloca abrupta e horizontalmente se misturando ao ar quente formado em regiões próximas ao solo, a formação da brisa do mar em regiões próximas da costa, o deslocamento de nuvens piroclásticas descarregada por vulcões, as correntes turbidíticas que se formam quando um rio lança uma carga de sedimentos no mar, avalanches de neve, deslocamento de frentes-frias, vazamentos de gases pesados, são exemplos práticos de escoamentos gravitacionais de relevância científica [5]. Dada a grande importância e abrangência deste tipo de escoamento existe um grande interesse na comunidade científica por estudos teóricos e experimentais que possam auxiliar na compreensão desse fenômeno. Muitos desses estudos consideram hipóteses idealizadas, onde os aspectos relacionados às correntes gravitacionais são tratados de forma isolada e simplificada. Conseqüentemente, muitos dos estudos experimentais consideram geometrias simples com escoamentos restritos a canais onde as feições características das correntes gravitacionais podem ser mais facilmente compreendidas e estudadas. Para uma ampla revisão sobre estudos teóricos e experimentais sobre correntes gravitacionais consulte a referência [5]. Os estudos experimentais são de suma importância na compreensão de aspectos globais do escoamento, porém, recentemente tem havido um grande interesse na modelagem numérica das correntes gravitacionais principalmente pelo aumento da capacidade de processamento dos computadores modernos e do desenvolvimento de códigos computacionais eficientes na solução das equações que governam o escoamento. Muitos desses estudos numéricos têm sido focados em métodos utilizando malhas estruturadas, métodos espectrais e utilizando o método de simulação direta (do inglês, *Direct Numerical Simulation* ou simplesmente DNS) onde todas as escalas presentes no escoamento são representadas no modelo computacional. Tais estudos são de grande valor na extração de informações detalhadas acerca da formação dos lóbulos (*lobes*) e rachaduras (*clefts*) característicos de escoamento de correntes gravitacionais, porém, mesmo para computadores modernos, o custo computacional na solução de problemas reais através de DNS ainda é elevadíssimo. Além disso, os códigos de malha estruturada, embora computacionalmente eficientes, não conseguem representar de forma satisfatória as feições associadas a geometrias complexas tais quais, por exemplo, as linhas costeiras, a batimetria do fundo do mar, etc... . Pain *et al* mostram, em um estudo recente [3], que a técnica LES (*Large Eddy Simulation*) associada aos métodos de malhas não-estruturada, tal como elementos finitos e volumes finitos, formam uma excelente combinação na modelagem de correntes gravitacionais em diversas escalas. Neste trabalho apresenta-se a aplicação do método estabilizado de elementos finitos SUPG/PSPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin/Pressure Stabilizing Petrov-*

Galerkin) [14], [15] para a solução do escoamento e a formulação estabilizada SUPG [11] provida do operador de captura de descontinuidades CAU (*Consistent Approximated Upwind*) para a equação de transporte. As pequenas escalas associadas à turbulência do escoamento são modeladas a partir do método LES utilizando o modelo clássico de Smagorinsky [12]. O código computacional desenvolvido, chamado EdgeCFD, contempla paralelismo híbrido (memória compartilhada, distribuída ou ambos simultaneamente), utiliza estrutura de dados por aresta para fins de otimização dos cálculos, método de Newton-inexato para a solução do problema não-linear em cada passo de tempo das equações do escoamento [10].

Este artigo está organizado nas seguintes seções: a segunda seção mostra as equações governantes do escoamento de correntes gravitacionais assim como a formulação de elementos finitos adotada na solução, a terceira seção discute os principais aspectos de solução do código computacional utilizado, a quarta seção mostra os casos de teste que foram utilizados para validação do código computacional, enquanto a quinta e última seção encerra o artigo com as conclusões finais e as propostas futuras.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

Nesta seção são apresentadas as equações governantes para escoamento incompressível e transporte convectivo-difusivo, assim como os esquemas de solução através da formulação estabilizada de elementos finitos.

2.1 Escoamento incompressível

Considere o domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$, onde n_{dim} é o número de dimensões espaciais, e Γ o contorno de Ω . Neste trabalho adotou-se a seguinte formulação velocidade-pressão da Equação de Navier-Stokes para descrever o escoamento incompressível de dois fluidos imiscíveis ρ_0 e ρ_1 segundo a hipótese de Boussinesq de que a diferença de massa específica entre os dois fluidos não ultrapasse 5%. Estas equações são:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \left(\frac{1}{\sqrt{Gr}} + \nu_{SGS} \right) \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \mathbf{e}_3 \quad em \quad \Omega \times [0, t_f] \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad em \quad \Omega \times [0, t_f] \quad (2)$$

onde ρ , \mathbf{u} , p e t são a massa específica, a velocidade, a pressão e a dimensão de tempo respectivamente. Gr é o número de Grashof, uma relação adimensional entre as forças de flutuação e as forças viscosas dada por:

$$Gr = \left(\frac{U_0}{\nu h_0} \right)^2 \quad (3)$$

Sendo h_0 um comprimento característico do escoamento e U_0 a velocidade de flutuação $U_0 = \sqrt{gh_0(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0}$. Na equação (1), ν_{SGS} e a viscosidade sub-malha onde os efeitos de pequena escala, devido à turbulência, são modelados segundo o método de simulação dos grandes vórtices, do inglês, *Large Eddy Simulation* ou simplesmente LES. Neste trabalho os efeitos de turbulência foram obtidos a partir do modelo de Smagorinsky clássico, dado por:

$$\nu_{SGS} = \rho C_s h^2 (2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))^{1/2} \quad (4)$$

onde C_s é a constante de Smagorinsky escolhida na faixa entre 0.1 e 0.2, h é o comprimento do filtro dado pela malha, ou seja, o comprimento do elemento e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ o tensor taxa de deformação dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (5)$$

As condições de contorno naturais e essenciais associadas às equações (1) e (2), impostas no contorno Γ , são representadas por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{on } \Gamma_g \quad (6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{on } \Gamma_h \quad (7)$$

onde Γ_g e Γ_h são subconjuntos de Γ .

Para a forma fraca das equações (1) e (2) assume-se os seguintes espaços de funções-peso e funções-teste para velocidade e pressão: \mathbf{S}_u^h , \mathbf{V}_u^h , \mathbf{S}_p^h e $\mathbf{V}_p^h = \mathbf{S}_p^h$. O método dos elementos finitos correspondente a formulação estabilizada SUPG/PSPG, para escoamento incompressível, pode ser escrita (segundo Tezduyar [14]) como segue: encontrar $\mathbf{u}^h \in \mathbf{S}_u^h$ e $p^h \in \mathbf{S}_p^h$ tal que $\forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}_u^h$ e $\forall q^h \in \mathbf{V}_p^h$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(p^h, \mathbf{u}^h) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h} d\Gamma + \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\rho} \left[\tau_{SUPG} \rho \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{w}^h + \tau_{PSPG} \nabla q^h \right] \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(p^h, \mathbf{u}^h) - \rho \mathbf{f} \right] d\Omega^e \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{LSIC} \nabla \cdot \mathbf{w}^h \rho \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega^e = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Na equação acima as primeiras quatro integrais correspondem aos termos da formulação padrão de Galerkin, enquanto as integrais remanescentes são termos de estabilização acrescentados à formulação. Note que os termos de estabilização são somatórias realizadas no nível de elemento. Os termos referentes à primeira somatória são as estabilizações SUPG e PSPG respectivamente enquanto a segunda somatória é devido à estabilização LSIC (*Least Squares Incompressibility Constraint*) para escoamentos com números de Reynolds mais elevados. Todos os termos de estabilização utilizados neste trabalho foram obtidos seguindo a referência [16], conseqüentemente:

$$\tau_{SUPG} = \tau_{PSPG} = \left[\left(\frac{2 \|\mathbf{u}^h\|}{h} \right)^2 + 9 \left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \tag{9}$$

onde \mathbf{u}^h é o vetor de velocidade local e ν é a viscosidade cinemática. Na equação (9) o termo de estabilização LSIC é calculado por:

$$\tau_{LSIC} = \frac{\|\mathbf{u}^h\| h}{2} \tag{10}$$

A discretização temporal da equação (9) dá origem a um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares a ser resolvido em cada passo de tempo:

2.2 Transporte da corrente gravitacional

Para o transporte das fases fluidas, considere a seguinte equação de advecção-difusão:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\rho} - \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{Sc \sqrt{Gr}} + \alpha_{SGS} \right) \nabla \tilde{\rho} \right) = 0 \tag{11}$$

onde α_{SGS} representa a difusão ocorrida nas escalas menores não capturadas pela discretização, Sc é o número de Schmidt e $\tilde{\rho}$ a flutuação adimensional da massa específica, definidos por:

$$Sc = \frac{\nu}{\mathbf{D}}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \quad (12)$$

onde \mathbf{D} é a difusividade.

A formulação de elementos finitos para a equação (12) pode ser escrita como: encontrar $\tilde{\rho}^h \in \mathcal{S}_{\tilde{\rho}}^h$, tal que, $\forall w^h \in \mathcal{V}_{\phi}^h$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w^h \left(\frac{\partial \tilde{\rho}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \tilde{\rho}^h \right) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w^h \cdot \mathbf{D} \nabla \tilde{\rho}^h d\Omega - \int_{\Gamma} w^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{SUPG} \mathbf{u}^h \cdot \nabla w^h \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \tilde{\rho}^h - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \tilde{\rho}^h) \right) d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \delta(\tilde{\rho}) \nabla w^h \cdot \nabla \tilde{\rho}^h d\Omega = \int_{\Omega} w^h \cdot f d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

onde \mathcal{S}_{ϕ}^h e \mathcal{V}_{ϕ}^h são as funções-teste e função-peso padrão de elementos finitos. As primeiras duas integrais representam a formulação de Galerkin da equação (12), a primeira somatória no nível de elemento corresponde à estabilização SUPG enquanto o segundo termo somatório representa o termo CAU (*Consistent Approximated Upwind*) de captura de discontinuidades empregado para capturar regiões de gradientes elevados presentes em regiões normais ao escoamento. A avaliação dos termos de estabilização τ_{SUPG} e δ segue as definições descritas em [11] e [13] respectivamente. A discretização temporal da equação (13) dá origem a um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares, devido ao termo de captura de discontinuidades, a ser resolvido a cada passo de tempo. No caso particular do método CAU, o parâmetro δ é avaliado por,

$$\delta = h \frac{|R(\tilde{\rho}^h)|}{\|\nabla \tilde{\rho}^h\|}, \text{ se } \|\nabla \tilde{\rho}^h\| \neq 0 \quad (14)$$

onde $R(\phi^h)$ é o resíduo da equação (13)

$$R(\tilde{\rho}^h) = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tilde{\rho} - \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{Sc\sqrt{Gr}} + \alpha_{SGS} \right) \nabla \tilde{\rho} \right) \quad (15)$$

3. PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Os resultados apresentados neste trabalho foram todos obtidos com a utilização do software EdgeCFD. Neste software o procedimento de solução das equações descritas na seção anterior compreende a integração no tempo de dois sistemas de equações não-lineares, um mais computacionalmente dispendioso oriundo das equações de escoamento e que acopla as soluções de velocidade e pressão e o outro devido ao transporte advectivo-difusivo. Para a marcha no tempo adotou-se o algoritmo predictor multi-corretor com passo de tempo adaptado através de um algoritmo de controle do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) (para maiores detalhes consultar [18]). No escoamento, os passos de multi-correção correspondem ao método de Newton-inexato conforme descrito em [10]. Neste método o algoritmo adapta a tolerância do solucionador linear iterativo de acordo com o histórico do resíduo da solução. Como solucionador linear, dado o caráter não-simétrico dos sistemas de equações originados, empregou-se o método *Generalized Minimal Residual Method* ou simplesmente GMRES com 30 vetores de Krylov. Como preconditionador adotou-se o Bloco-Jacobi e o Jacobi para escoamento e transporte respectivamente. Grande parte do esforço computacional durante o procedimento de solução se deve ao produto matriz-vetor realizado no GMRES. De modo a tornar mais eficiente tal operação utilizou-se a estrutura de dados aresta-por-arestas conforme descrito em [10]. Segundo Ribeiro e Coutinho [17] a utilização da estrutura de dados por arestas, para problemas do tipo descritos neste trabalho, além de representar um ganho na realização da operação de multiplicação matriz-vetor ela também permite que se economize na quantidade de memória requerida para armazenar os coeficientes da matriz de rigidez do sistema e na redução do número de operações de ponto flutuante em relação a estruturas tradicionais tal como CSR (*Compressed Sparse Row*) e EBE (*Element-by-Element*). Os cálculos foram realizados em paralelo utilizando processamento distribuído através da biblioteca MPI (*Message Passing Interface*). A geração das partições paralelas foi realizada através do uso da biblioteca Metis enquanto que a extração de aresta e a determinação da ordenação de dados mais eficiente são realizadas pela biblioteca EdgePack conforme descrito em [19].

4. PROBLEMAS DE TESTE

Nesta seção são apresentados os problemas utilizados na validação do esquema de solução proposto neste trabalho. A implementação foi realizada no software EdgeCFD utilizando a linguagem de programação Fortran90. Todos os cálculos foram realizados utilizando processamento paralelo distribuído (*Message Passing Interface*) em oito núcleos de processadores Intel Itanium-2 (Montecito) do sistema SGI Altix 450 instalado no Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD/COPPE/UFRJ).

4.1 Mistura de dois fluidos em uma configuração plana

Uma das primeiras medidas relacionadas a correntes gravitacionais foram feitas em canais próximos a linha costeira onde a mistura de água doce com a água do mar ocorre quando uma comporta se abre e os fluidos começam a escoar por ação da gravidade [5]. A esse tipo de escoamento dá-se o nome, em inglês, de *Lock Exchange Flow*. Tal escoamento pode ser facilmente reproduzido em laboratório e tem sido amplamente utilizado pela comunidade científica na validação de códigos numéricos, dada à disponibilidade de dados experimentais das principais estruturas características desse tipo de escoamento, tais como: forma, dimensão e frequência da ocorrência de lóbulos e rachaduras assim como a posição e deslocamento da frente de mistura. Em [6] e [7] Härtel *et al* discutem, em detalhes, a formação de tais estruturas para configurações considerando condição de deslizamento e não-deslizamento na base e no topo do modelo. Nesse mesmo trabalho o autor apresenta uma série de resultados numéricos obtidos a partir de simulações do tipo DNS (*Direct Numerical Simulation*) utilizando um código de análise pseudo-espectral. Outros trabalhos que reportam soluções DNS para o mesmo problema são [9] e [8]. Em consenso, todos esses autores utilizaram malhas estruturadas onde é comum a utilização de algum tipo de perturbação no início do escoamento para forçar um deslocamento menos simétrico da frente. Tal perturbação não foi necessária no presente estudo já que a própria orientação da malha não estruturada foi suficientes para que a frente perdesse simetria no início.

A Figura 1 apresenta o domínio do problema com suas dimensões sendo $L_x=30,0$, $L_y=3,0$ e $h=2,0$. O domínio foi discretizado em uma malha não estruturada contendo 2.630.883 tetraedros, 3.202.772 arestas e 471.585 nós. A diferença de massa específica entre os fluidos leve e pesado não ultrapassou 5% para que a hipótese de Boussinesq pudesse ser utilizada. Nas faces inferior e superior aplicou-se condição de não-deslizamento enquanto nas demais faces admitiram-se condições de deslizamento.

Para este problema sabe-se, de resultados experimentais e simulações DNS, que a frente de mistura tende a se deslocar com velocidade constante ([6], [8] e [9]).

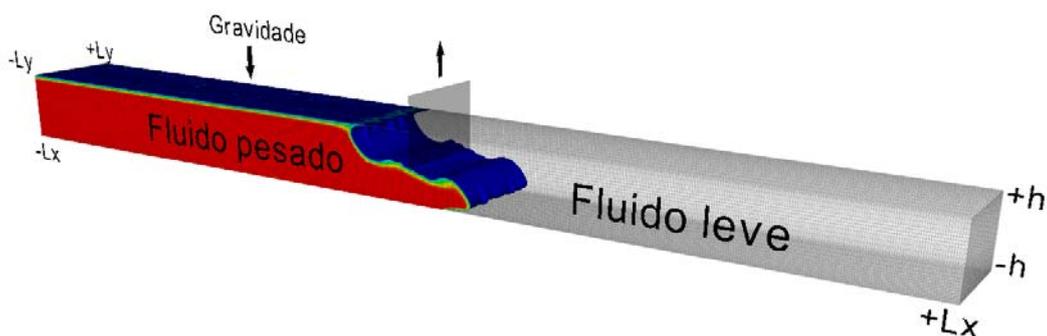


Figura 1 – Mistura de dois fluidos em uma configuração plana – descrição do problema.

A Figura 2 apresenta os resultados obtidos neste trabalho (Figura 2-a) comparados qualitativamente com os resultados numéricos apresentados por Härtel *et al* [6] (Figura 2-b) e Cantero [8] (Figura 2-c) para os tempos 0, 5, 10, 15 e 20. Para fins de comparação, é importante observar que a Figura 2-b apresenta a posição das frentes em um domínio mais curto ($L_x \in [-15,15]$) que o das demais figuras ($L_x \in [-20,20]$). Nota-se uma boa concordância entre os resultados obtidos com aqueles apresentados nas referências. Nos três casos a frente possui deslocamento semelhante para os instantes plotados. Tal parâmetro é de fundamental importância para o estudo de formação de reservatórios turbidíticos, pois indica o alcance que uma descarga de sedimentos irá alcançar ao ser lançada por um rio no mar. É importante salientar que em [6] Härtel *et al* utilizou uma malha computacional contendo 4,25 milhões de pontos enquanto em [8], Cantero *et al* utilizou 1,7 milhões de pontos de resolução, ou seja, no presente estudo, o comportamento global e as maiores escalas do escoamento foram devidamente representados utilizando-se somente 11,09% e 27,74% de resolução espacial.

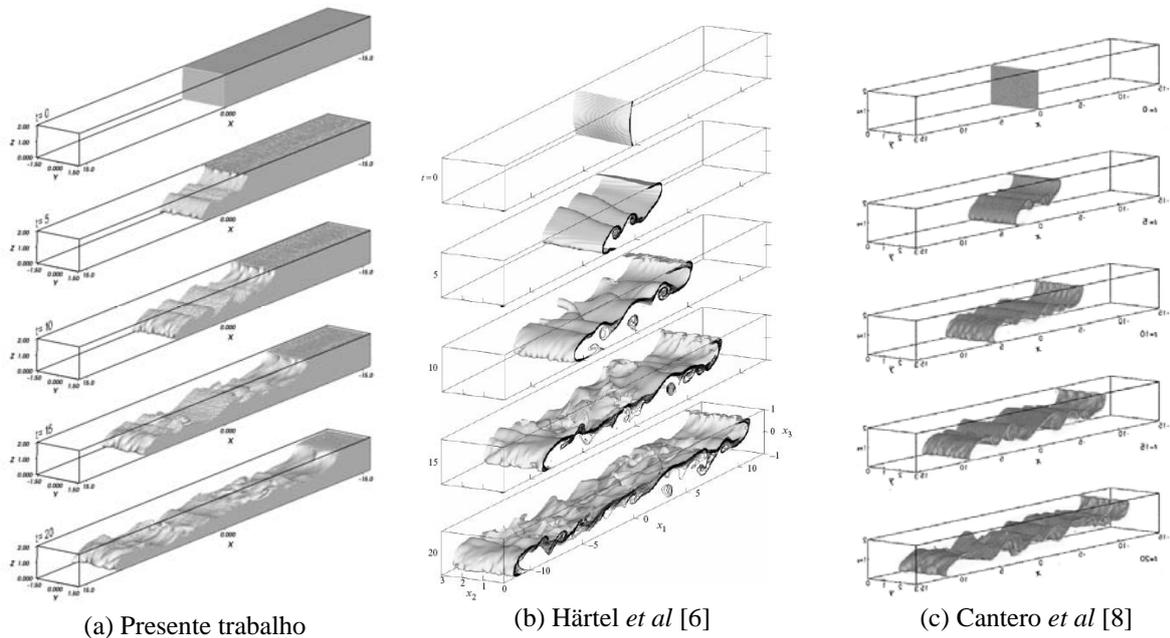


Figura 2 – Comparação qualitativa para os tempos 0, 5, 10, 15 e 20 entre os resultados obtidos neste trabalho com aqueles mostrados em [6] e [8]

A Figura 3 apresenta a evolução da posição da frente de mistura com o tempo, obtidos para $Gr=1,5 \times 10^6$ e $Sc=0,71$. Nota-se que, após um período inicial de ajuste, a frente se desloca a uma velocidade constante. Tal comportamento é reportado como sendo característico para este problema em trabalhos anteriores ([6], [8] e [9]). A partir da velocidade da frente obteve-se o número de Froude ($Fr = u_f / U_0$) igual a 0,579, valor este que está em perfeita concordância com o que é reportado na literatura.

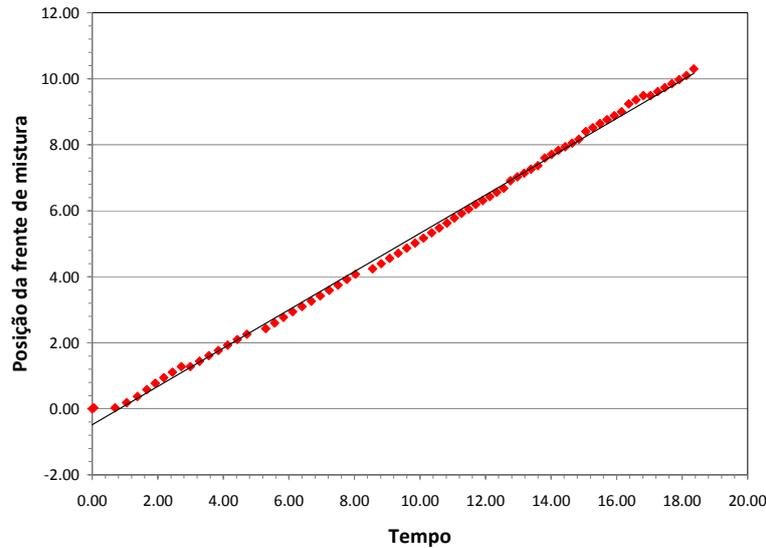


Figura 3 – Posição da frente de deslocamento *versus* tempo para $\tilde{\rho} = 0.5$ ($Gr=1.5 \times 10^6$ e $Sc=0.71$).

4.2 Mistura de dois fluidos em uma configuração circular

A principal característica do problema planar, descrito na seção anterior, é que a frente de mistura avança de maneira uniforme e linear. No caso da descarga de um fluido mais denso em uma configuração cilíndrica o mesmo avanço se dá de maneira não-linear.. Essa diferença fundamental modifica completamente a dinâmica do escoamento desenvolvido para esta geometria em relação ao caso planar. Para o caso cilíndrico a intensidade de mistura tende a diminuir com o avanço da frente, porém, nas etapas iniciais existe uma concentração abrupta de inércia e vorticidade nas regiões próximas a cabeça do escoamento com a formação de um grande bulbo que impulsiona o fluido avante promovendo um maior contato entre as fases e conseqüentemente um maior efeito de mistura e dissolução [20], [21]. Neste caso, a dinâmica do escoamento assemelha-se muito ao que ocorre quando um gás denso é descarregado na atmosfera, daí vem a importância do estudo desse problema na criação de planos de evacuação e no controle e planejamento de riscos industriais.

O problema consiste em uma coluna cilíndrica de fluido mais denso centralizada em um domínio circular. Aqui se adotou um domínio cúbico para facilitar a aplicação das condições de contorno. Por se tratar de um escoamento que tende a se desenvolver igualmente para todas as direções de maneira simétrica, adotou-se somente $\frac{1}{4}$ do modelo (setor de 90°) conforme ilustrado na Figura 4. As dimensões do cubo descrito na Figura 4 são $L_x=20,0$, $L_y=20,0$ e $h=2,0$. O raio inicial da coluna de fluido denso é $r_o = 2$. A malha não-estruturada de elementos finitos foi construída com 2.125.139 tetraedros, 2.607.939 arestas e 390.527 nós. Assim como para o caso planar, adotou-se $Gr=1,5 \times 10^6$ e $Sc=0.71$.

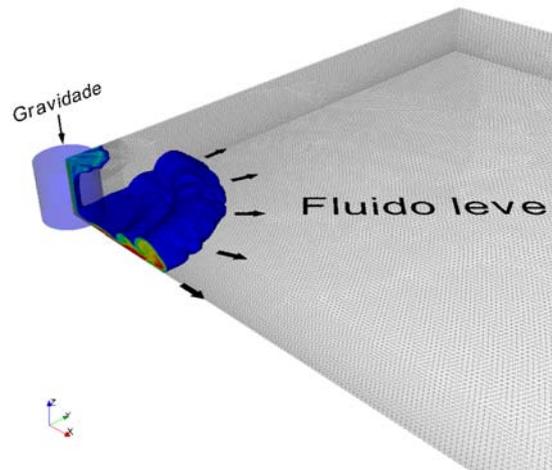


Figura 4 – Mistura de dois fluidos em uma cilíndrica – descrição do problema.

A Figura 5 mostra uma comparação qualitativa entre os resultados obtidos no presente trabalho com aqueles apresentados por Cantero *et al* em [8] utilizando um método pseudo-espectral com uma malha computacional com 71 vezes mais resolução espacial do que a que foi utilizada aqui. Observa-se que, embora com muito menos resolução espacial, as principais feições do escoamento foram bem representadas e com deslocamentos equivalentes para os tempos plotados na figura. Sabe-se de resultados experimentais (ver [5], [20], por exemplo) que neste problema o avanço da frente de mistura apresenta 3 fases com comportamentos distintos para a velocidade de deslocamento. Em uma rápida fase inicial a cabeça do escoamento apresenta uma velocidade constante, em uma segunda fase verifica-se uma velocidade também constante, porém maior do que a da fase inicial e em um estágio final o fluido denso começa a desacelerar. Tal comportamento também foi verificado e pode ser visualizado na Figura 6 onde está plotada a posição radial da cabeça do escoamento com o tempo.

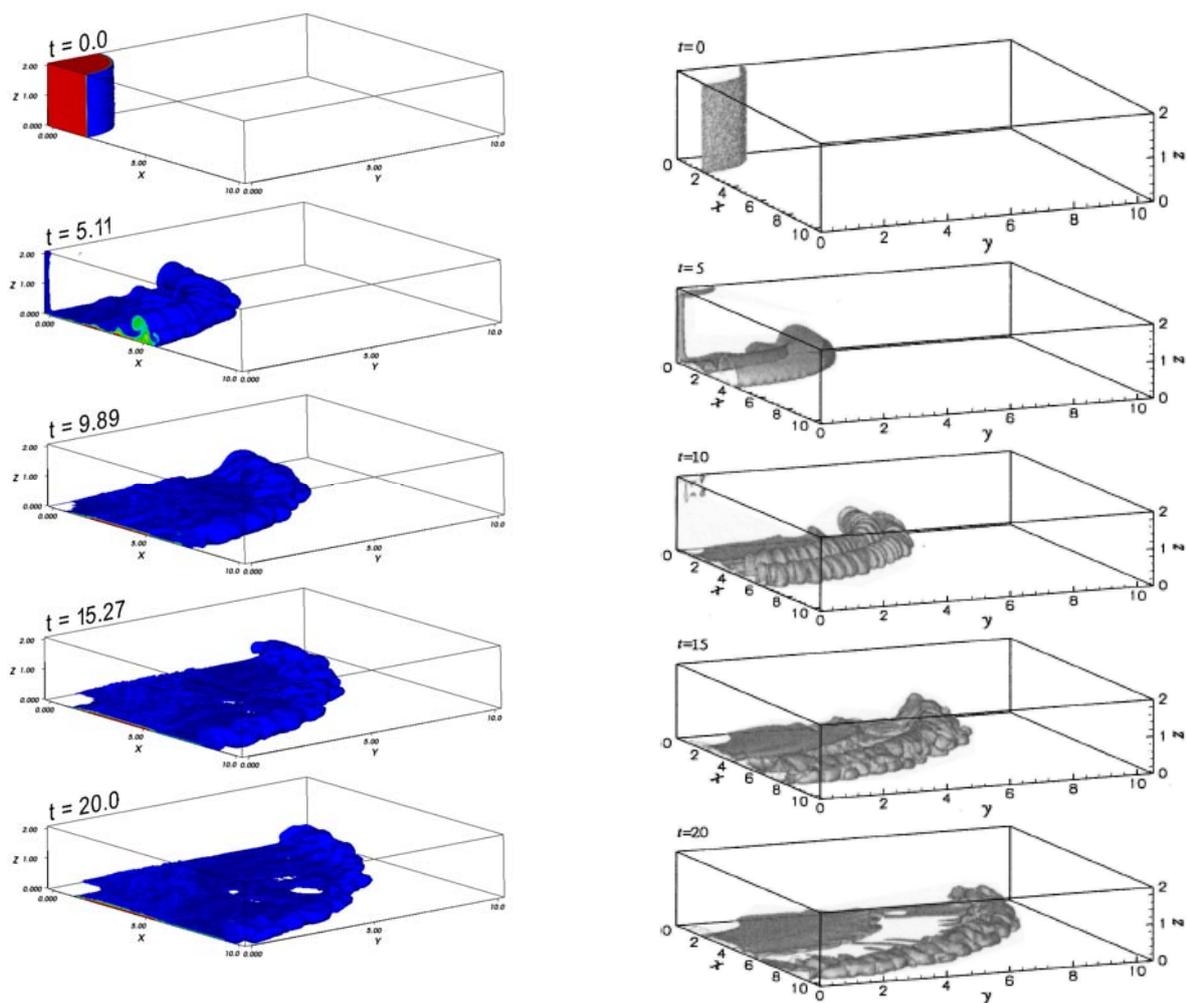


Figura 5 – Comparação qualitativa para os tempos 0, 5, 10, 15 e 20 entre os resultados obtidos neste trabalho com aqueles mostrados em [8]

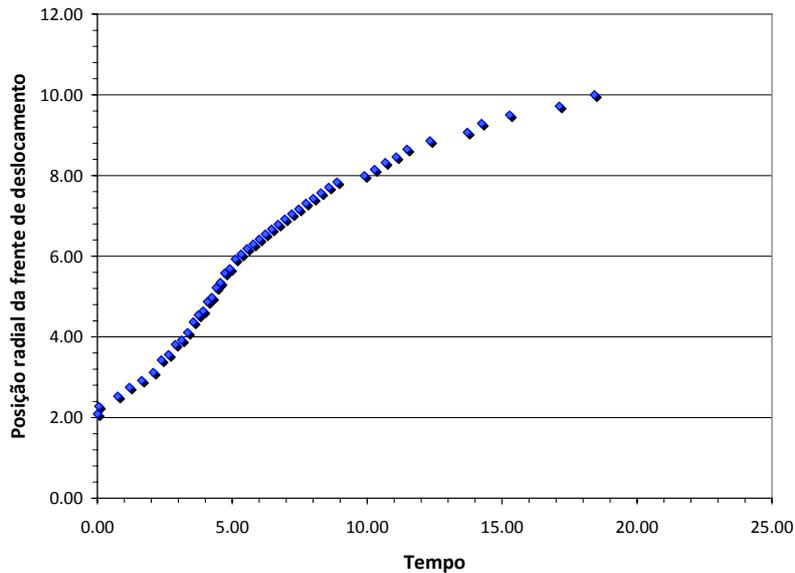


Figura 6 – Posição da frente de deslocamento *versus* tempo para $\tilde{\rho} = 0.25$, $Gr=1.5 \times 10^6$ e $Sc=0.71$

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a aplicação do método dos elementos finitos estabilizado utilizando estruturas de dados aresta-por-aresta em malhas não-estruturadas na modelagem de fenômenos relacionados a correntes gravitacionais. Mostrou-se ser possível a aplicação de técnicas computacionais voltadas para malhas não-estruturadas, tal como o método dos elementos finitos, para uma estimativa confiável dos principais parâmetros e feições desenvolvidos em escoamentos de correntes gravitacionais. Os resultados mostraram que as escolhas apresentadas neste trabalho foram capazes de reproduzir tais características quando comparados à resultados experimentais e de simulações numéricas DNS bem mais dispendiosas.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte financeiro suprido pela Agência Nacional do Petróleo (ANP/Brasil), ao Núcleo de Atendimento em Computação de Alto Desempenho (NACAD) e ao Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia (LAMCE) pela disponibilidade dos recursos computacionais utilizados nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- [1] G. De Cesare, A. Schleiss, F. Hermann, “Impact of Turbidity Currents on Reservoir Sedimentation”, *ASCE Journal of Hydraulic Engineering*, 127(1):6-16, (2001).
- [2] V. K. Birman, E. Meiburg, “High-Resolution Simulation of Gravity Currents”, *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, 28(2):169-173, (2006).

- [3] C. C. Pain, M. D. Piggott, A. J. H. Goddard, F. Fang, G. J. Gorman, D. P. Marshall, M. D. Eaton, P. W. Power, C. R. E. de Oliveira, “Three-Dimensional Unstructured Mesh for Ocean Modeling”, *Ocean Modelling*, 10:5-33, (2005).
- [4] R. N. Elias, M. A. D. Martins, A. L. G. A. Coutinho, “Parallel Edge-Based Inexact Newton Solution of Steady Incompressible 3D Navier-Stokes”, *Lecture Notes in Computer Science*, 3648:1237-1245, (2005)
- [5] J. Simpson, “Gravity Currents”, *2nd. Ed.*, Cambridge University Press, (1997).
- [6] C. Härtel, E. Meiburg e F. Necker, “Analysis and Direct Numerical Simulation of the flow at a Gravity-Current Head. Part 1: Flow Topology and Front Speed for Slip and no-Slip boundaries”, *Journal of Fluid Mechanics*, 418:189-212, (2000).
- [7] C. Härtel, F. Cralsson e M. Thunblom, “Analysis and Direct Numerical Simulation of the Flow at a Gravity-Current Head. Part 2. The lobe-and-cleft instability”, *Journal of Fluid Mechanics*, 418:213-229, (2000).
- [8] C. I. Mariano, S. Balanchandar, M. H. García e J. P. Ferry, “Direct Numerical Simulation of Planar and Cylindrical Density Currents”, *Journal of Applied Mechanics*, 73:923-930, (2006).
- [9] S. K. Ooi, “High Resolution Numerical Simulations of Lock-Exchange Gravity-Driven Flows”, PhD thesis, *University of Iowa, USA*, (2006).
- [10] R. N. Elias, A. L. G. A. Coutinho, M. A. D. Martins, R. M. Sydenstricker, “Edge-based Data Structures for the Parallel Solution of 3D Steady Incompressible Fluid Flow with the SUPG/PSPG Finite Element Formulation”, *XXVI CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods*, Guarapari, ES, Brasil, (2005).
- [11] A. N. Brooks e T. J. R. Hughes. “Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1982; 32:199-259.
- [12] J. Smagorinsky, “General circulation experiments with primitive equations, part i: the basic experiment”. *Monthly Wea. Rev.*; 91:99-152, (1963).
- [13] A. C. Galeão, E. G. D. do Carmo. “A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; 68(1):83-95.
- [14] T. E. Tezduyar. “Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations”. *Advances in Applied Mechanics*; 28:1-44, 1992.
- [15] L. P. Franca and S. L. Frey. Stabilized finite element methods: ii. The incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 99:209-233, (1992).

- [16] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray and R. Shih. “Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements”. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*; 95:221-242, (1992).
- [17] F. L. B. Ribeiro, A. L. G. A. Coutinho. “Comparison Between Element, Edge and Compressed Storage Schemes for Iterative Solutions in Finite Element Analyses”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 63(4):569 –588, (2005).
- [18] A. M. P. Valli, G. F. Carey e A. L. G. A. Coutinho. “Control Strategies for Timestep Selection in FE Simulation of Incompressible Flows and Coupled Reaction-Convection-Diffusion Processes”. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*; 47:201-231, 2005.
- [19] A. L. G. A. Coutinho, M. A. D. Martins, R. M. Sydenstricker, R. N. Elias. “Performance Comparison of Data-Reordering Algorithms for Sparse Matrix-Vector Multiplication in Edge-Based Unstructured Grid Computations”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 66, p. 431-460, (2006);
- [20] M. Patterson, J. Simpson, S. Dalziel e G. van Heijst, “Vortical Motion in the head of an Axisymmetric Gravity Current”. *Physics of Fluids*, 18(4), (2006).
- [21] M. I. Cantero, C. M. García, M. H. García e S. Balachandar, “Characterization of Flow Structures at the Front of Cylindrical Gravity Current Fronts”, *Mecánica Computacional*, XXV, pp. 2267-2291, Argentina, (2006).