

Notas de Aula
de

Análise de Redes Elétricas

(2006)

Djalma M. Falcão
(falcao@nacad.ufrj.br)

COPPE/UFRJ
Programa de Engenharia Elétrica
Caixa Postal 68504
CEP 21941-972, Rio de Janeiro, RJ
Tel.: (0XX)(21) 2562-8625, (0XX)(21) 2562-8626
Fax.: (0XX)(21) 2562-8627

Prefácio

Estas notas de aula contêm o material apresentado nas aulas da disciplina *COE 751 Análise de Redes Elétricas* dos cursos de Mestrado e Doutorado do Programa de Engenharia Elétrica da COPPE/UFRJ. O objetivo das notas é facilitar o acompanhamento da disciplina, reduzindo a necessidade do aluno em anotar as informações fornecidas em aula e permitindo ao mesmo uma leitura antecipada dos assuntos expostos. Estas notas não têm o objetivo de substituir a consulta à bibliografia recomendada na disciplina, a qual contém informações muito mais abrangentes que as aqui apresentadas.

Parte do material apresentado tem um caráter de revisão de assuntos já estudados em disciplinas de graduação. O objetivo de introduzir esses tópicos em uma disciplina de pós-graduação é nivelar os conhecimentos de alunos com diferentes formações básicas e uniformizar a notação e a nomenclatura utilizadas.

Estas notas de aula vêm sendo revisadas e ampliadas ao longo de vários anos, acompanhando a evolução da literatura no tema e corrigindo erros de edição. Entretanto, apesar do esforço em eliminar erros, alguns ainda persistem. O autor agradece antecipadamente aos leitores que indicarem eventuais erros encontrados.

A forma atual destas notas de aula não seria possível sem a ajuda inestimável dos alunos de Mestrado e Doutorado que as utilizaram e apontaram erros e omissões contidas em edições anteriores, aos quais o autor apresenta seu profundo agradecimento. Este agradecimento se estende à professora Carmen Lucia Tancredo Borges, com a qual ao autor tem dividido a disciplina de Análise de Redes Elétricas nos últimos anos, e que tem contribuído decisivamente no aperfeiçoamento deste texto.

Rio de Janeiro, Março de 2006

Djalma M. Falcão

Conteúdo

1	Sistemas Elétricos de Potência	1
1.1	Introdução	1
1.2	Estrutura Funcional dos SEPs	1
1.2.1	Sistema Elétrico Brasileiro	2
1.3	Planejamento e Operação de SEPs	4
1.4	Estudos e Ferramentas Computacionais	5
1.5	Reestruturação dos SEPs	6
1.5.1	Privatização e Reestruturação do Setor Elétrico Brasileiro	8
2	Modelos de Componentes	11
2.1	Introdução	11
2.2	Linhas de Transmissão em CA	11
2.3	Elos CC	12
2.4	Transformadores	15
2.4.1	Transformadores com relação de transformação variável sob carga	16
2.4.2	Transformadores trifásicos	17
2.4.3	Transformadores com três enrolamentos	18
2.5	Geradores e Compensadores Síncronos	18
2.6	Bancos de Capacitores e Indutores	19
2.7	Compensadores Estáticos	19
2.8	Cargas	21
2.8.1	Modelo Composto - ZIP	21
2.8.2	Modelo Exponencial	22
3	Fluxo de Potência	25
3.1	Introdução	25
3.2	Formulação do Problema	26
3.2.1	Modelo da Rede	26
3.2.2	Tipos de Barras	28
3.2.3	Conjunto Básico de Equações	31
3.3	Solução do Problema	33

3.4	Métodos de Solução	33
3.4.1	Critério de Precisão da Solução	34
3.4.2	Método de Gauss-Seidel	35
3.4.3	Método de Newton-Raphson	37
3.4.4	Método Desacoplado Rápido	42
3.5	Controles e Limites na Solução do Fluxo de Potência	46
3.5.1	Métodos de Implementação	46
3.6	Cálculo de Perdas e Fluxos de Potência Ativa e Reativa	47
4	Fluxo de Potência Linearizado	51
4.1	Equações Básicas	51
4.2	Formulação Matricial	52
4.3	Inclusão de Perdas no Modelo Linearizado	56
4.4	Relação de Sensibilidade	57
4.5	Análise de Alterações no Modelo Linearizado	59
4.5.1	Alterações na condição de carga-geração	59
4.5.2	Alterações na rede	60
4.6	Método dos Fatores de Distribuição	61
4.6.1	Fator de Distribuição para Deslocamento de Geração	62
4.6.2	Fator de Distribuição para Desligamento de Ramo	63
4.6.3	Fator de Distribuição Combinado de Deslocamento de Geração e Desligamento de Ramo	64
4.6.4	Fator de Distribuição Combinado de Desligamento de Dois Ramos	65
4.6.5	Fator de Distribuição para Transferência de Potência	65
5	Fluxo de Potência Ótimo	69
5.1	Introdução	69
5.1.1	Formulação do Problema	69
5.1.2	Aplicações	70
5.1.3	Métodos de Solução: Histórico	70
5.2	Natureza do Problema	71
5.3	Formulação Matemática	71
5.3.1	Variáveis	71
5.3.2	Restrições de Igualdade	72
5.3.3	Restrições de Desigualdade	73
5.3.4	Função Objetivo	74
5.4	Fluxo de Potência Ótimo Linearizado	75
5.5	Fluxo de Potência Ótimo Linearizado com Restrições de Segurança	81
5.6	Método de Dommel & Tinney	83
5.6.1	FPO sem Restrições de Desigualdade	83
5.6.2	Restrições de desigualdade nas variáveis de controle	85

5.6.3	Restrições de desigualdade funcionais e nas variáveis de estado	85
5.7	Método de Newton	88
5.7.1	Formulação Básica	88
5.7.2	Seleção do Conjunto de Restrições Ativas	89
5.8	Método dos Pontos Interiores	90
6	Avaliação Estática da Estabilidade de Tensão	95
6.1	Introdução	95
6.2	Características P-V e P-Q	97
6.3	Análise de Sensibilidade Q-V e P-V	103
6.4	Análise Modal	105
6.5	Fluxo de Potência Continuado	106
6.5.1	Reformulação das Equações do Fluxo de Potência	106
6.5.2	Etapa de Previsão	108
6.5.3	Etapa de Correção	109
A	Sistemas de Equações Algébricas Lineares	113
A.1	Introdução	113
A.2	Métodos de Solução	114
A.3	Métodos Diretos	115
A.3.1	Eliminação de Gauss	115
A.3.2	Fatoração LU	117
A.4	Ordenação	120
A.4.1	Ordenação para Preservar a Esparsidade	120
A.4.2	Representação da Estrutura de Matrizes por Grafos	121
A.4.3	Esquemas de Ordenação	123
A.5	Armazenamento de Matrizes Esparsas	125
A.6	Métodos Iterativos	129
A.6.1	Método de Jacobi	129
A.6.2	Método de Gauss-Seidel	130
A.6.3	Método de Sobre-relaxação sucessiva (SOR)	131
A.6.4	Convergência	131
A.6.5	Método do Gradiente Conjugado	132
A.6.6	Método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado	134
A.6.7	Método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado	136
B	Programação Não-Linear	139
B.1	Enunciado Geral	139
B.1.1	Casos Particulares	140
B.2	Representação Gráfica	140
B.3	Condições de Otimalidade	141
B.3.1	PPNL sem Restrições	142
B.3.2	PPNL com Restrições de Igualdade	142

B.3.3	PPNL com Restrições de Igualdade e Desigualdade . . .	144
B.4	Métodos de Solução do PPNL sem Restrições	147
B.4.1	Minimização Unidirecional	148
B.4.2	Método do Gradiente	152
B.4.3	Método de Newton	152
B.5	Métodos de Solução do PPNL com Restrições	154
B.5.1	Método das Penalidades	154
C	Programação Linear	157
C.1	O Problema de Programação Linear	157
C.2	Caracterização Algébrica	158
C.3	O Método Simplex	162
C.4	Forma Matricial do Método Simplex	163
C.5	Dualidade	167
C.6	Análise de Sensibilidade	168

Capítulo 1

Sistemas Elétricos de Potência

1.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma visão geral do estudo de Sistemas Elétricos de Potência (SEP) dos pontos de vista de sua estrutura funcional, planejamento e operação, estudos e ferramentas computacionais. É também apresentada uma introdução ao processo de reestruturação do setor elétrico atualmente em andamento.

1.2 Estrutura Funcional dos SEPs

De um ponto de vista funcional, os SEPs apresentam uma estrutura como mostrada na Figura 1.1. Seus principais componentes são os subsistemas de:

- *Geração*: composto pelas usinas ou centrais geradoras. Essas centrais podem ser do tipo hidrelétrica, térmica (carvão, óleo, gas natural, etc.) ou nuclear. As centrais hidrelétricas, em geral, são localizadas em pontos distantes dos centros de consumo, exigindo sistemas de transmissão complexos e em tensão elevada.
- *Transmissão*: constituído pelas linhas de transmissão e equipamentos auxiliares necessários para transmitir a energia produzida nas centrais geradoras até os centros de consumo. Os sistemas de transmissão podem ser em corrente alternada (CA) ou em corrente contínua (CC),



Figura 1.1: Estrutura funcional de um SEP

sendo os últimos utilizados apenas no caso de transmissão de grandes blocos de potência a longas distâncias.

- *Distribuição*: constituído pelas subestações e alimentadores responsáveis pela distribuição da energia elétrica aos consumidores industriais, comerciais e residenciais. Em geral, incluem também uma parte local do sistema de transmissão, em tensão mais baixa, o qual recebe a denominação de subtransmissão.
- *Comercialização*: representa o segmento responsável pela compra e venda de energia no atacado e no varejo. Não incorpora ativos físicos mas somente os mecanismos de comercialização da energia. Por esta razão é representado por uma caixa pontilhada na Figura 1.1. A comercialização de energia para grandes consumidores pode ser realizada diretamente do subsistema de transmissão ou subtransmissão.

Na figura 1.2 é apresentado o diagrama unifilar de um SEP onde são ilustrados os subsistemas acima referidos. Nesse sistema hipotético, existem duas grandes centrais geradoras hidrelétricas localizadas a grande distância do centro de consumo. Uma delas é conectada ao sistema através de uma linha de transmissão em CC (± 600 kV) e a outra através de uma linha de transmissão em CA (750 kV). Parte da energia dessas centrais é utilizada por um sistema de distribuição, constituído por linhas de subtransmissão (138 kV) e por várias subestações de distribuição (apenas uma delas é mostrada na figura). Um grande consumidor industrial é alimentado diretamente através do sistema de subtransmissão. Também existe nesse sistema uma central térmica de médio porte. A partir da subestação de distribuição, partem alimentadores na tensão de 13,8 kV, os quais alimentam consumidores industriais nesse nível de tensão e consumidores comerciais e residenciais através de uma rede secundária de distribuição em 220/127 V. Conectada diretamente à rede de distribuição, existe uma pequena central geradora a qual representa a tendência moderna de *Geração Distribuída*.

1.2.1 Sistema Elétrico Brasileiro

O sistema de energia elétrica brasileiro tem dimensões continentais. É composto pelos subsistemas das regiões Sudeste e Centro Oeste (SE/CO), das regiões Norte e Nordeste (N/NE) e da Região Sul (S). Os subsistemas SE/CO e S foram interligados ao subsistema N/NE em dezembro de 1998 por uma linha de transmissão em 500 kV, com a capacidade de transmissão de 1000 MW e com 1000 km de extensão, tendo os seus terminais nas subestações de Imperatriz (Maranhão) e Serra da Mesa (Goiás). Esta interconexão foi posteriormente reforçada com a construção de circuito paralelo ao acima referido e de uma nova linha de transmissão, conectando as subestações de Imperatriz e a região metropolitana de Salvador (Bahia). Esse sistema constitui o

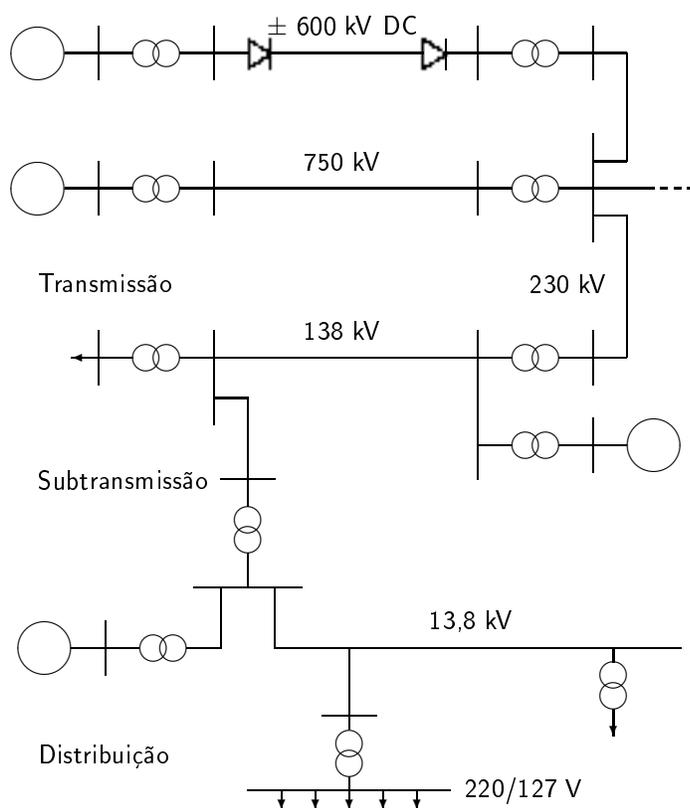


Figura 1.2: Diagrama unifilar de um SEP típico

chamado Sistema Interligado Nacional (SIN). Apenas 3,4 % da capacidade de produção de eletricidade do país encontram-se fora do SIN, em pequenos sistemas isolados localizados, principalmente, na região amazônica. A Figura 1.3 apresenta a malha principal de transmissão do SIN.

A capacidade instalada do sistema interligado brasileiro é de 77.321 MW, sendo 66.321 MW em usinas hidrelétricas e 11.000 MW em usinas térmelétricas. Para se obter a capacidade de produção total disponível, deve-se somar a esses valores à disponibilidade de importação de 2.178 MW da Argentina e 4.100 MW de Itaipu, parte contratada à ANDE/Paraguai¹.

O sistema brasileiro apresenta uma forte preponderância de geração hidrelétrica (mais de 90 % da capacidade instalada) e caracteriza-se pela presença de grandes reservatórios com capacidade de regulação plurianual, em cascatas distribuídas em várias bacias hidrográficas. O sistema inclui a usina de Itaipu, a maior usina hidrelétrica do mundo, com capacidade instalada

¹Dados obtidos na página do ONS na Internet (www.ons.org.br) para o ano de 2003.

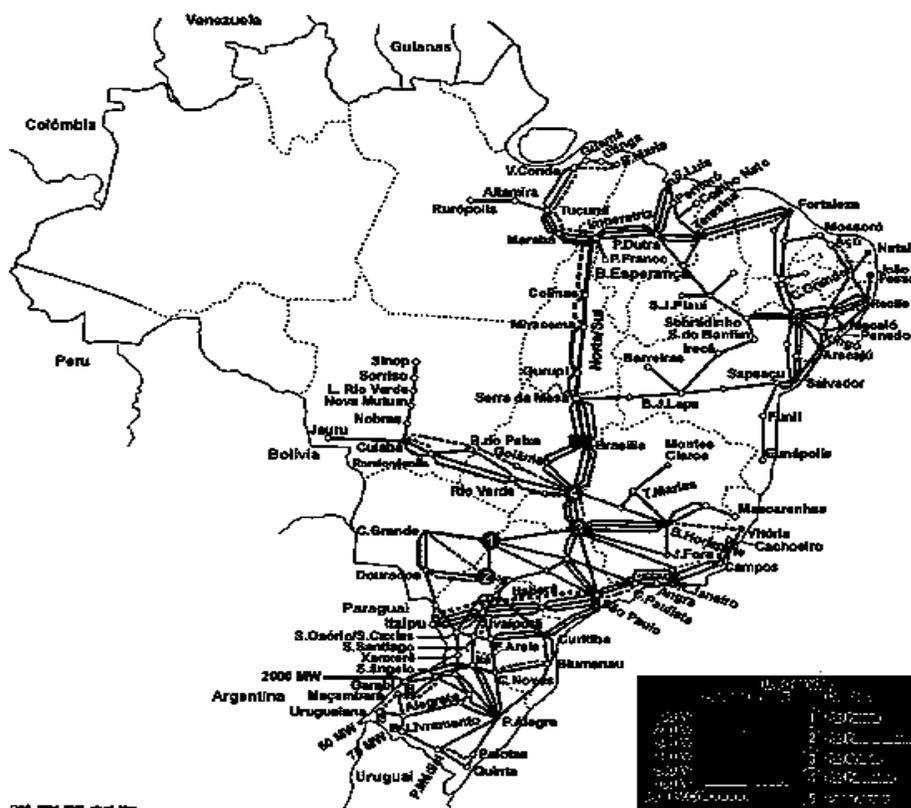


Figura 1.3: Malha principal do sistema interligado brasileiro (Fonte ONS: www.ons.org.br).

de 12.600 MW, de propriedade comum do Brasil e do Paraguai.

As taxas históricas de crescimento da carga no sistema brasileiro têm sido elevadas devido ao esforço de industrialização do país. Na década de 70, a taxa média de crescimento foi de cerca de 9 %. No período de recessão econômica, compreendido no final da década de 80 e início da década de 90, essa taxa reduziu-se para cerca de 4 %. Em 1997, o crescimento da carga foi de 6 %. A previsão para os próximos dez anos é que a demanda do sistema brasileiro deverá crescer com uma taxa média de cerca de 5 % ao ano.

1.3 Planejamento e Operação de SEPs

As atividades da engenharia de SEPs podem ser classificadas em três categorias principais, baseando-se nos horizontes de tomada de decisão considerados e as ações permitidas no mesmo. Essas categorias são:

- *Planejamento da Expansão*: tem como objetivo determinar, dentro de um horizonte de longo prazo (até 30 anos), os novos equipamentos a ser instalados no sistema, visando atender um aumento previsto da demanda de energia elétrica. Geralmente, o planejamento é realizado de forma mais ou menos independente nos diversos blocos funcionais do sistema. No caso da geração e transmissão, existe uma integração mais forte do processo de planejamento.
- *Planejamento da Operação*: tem como objetivo estabelecer uma estratégia de operação, incluindo planos de emergência, para um horizonte de médio prazo (por exemplo, até 5 anos para sistemas hidrotérmicos com regulação plurianual, como é o caso do Brasil). Normalmente é subdividido em um planejamento da operação energética, no qual se analisa a melhor estratégia para utilização dos recursos energéticos (água disponível e prevista para afluir aos reservatórios em contraposição ao uso de combustível nas usinas térmicas) e um planejamento da operação elétrica, no qual são analisados os impactos das decisões energéticas, do programa de manutenção, etc., no desempenho dos subsistemas de geração e transmissão, visando garantir um nível adequado de confiabilidade.
- *Operação em Tempo-Real*: tem como objetivo atender à demanda instantânea do sistema, segundo as diretrizes do planejamento da operação, com desvios mínimos em relação às tensões e frequência nominais e minimizando as interrupções no fornecimento de energia. Atualmente é realizado a partir dos Centros de Operação de Sistemas, os quais possuem facilidades para aquisição remota de dados e telecomando (SCADA) e sistemas computacionais capazes de fornecer aos operadores condições mais adequadas para tomadas de decisões e ações de controle.

1.4 Estudos e Ferramentas Computacionais

Para executar as tarefas relacionadas ao planejamento e operação de SEPs descritas no item anterior, os engenheiros de SEP necessitam de ferramentas computacionais para análise, simulação e controle. Essas ferramentas permitem aos engenheiros a tomada de decisões com relação ao planejamento da expansão, à melhor estratégia de operação e ao efetivo controle do sistema. A seguir são relacionadas algumas ferramentas e tipos de estudos utilizados nos vários estágios da engenharia de SEPs:

- Ferramentas Básicas de Análise e Simulação:
 - Fluxo de Potência;
 - Curto-Circuito;

- Simulação da Dinâmica Eletromecânica;
- Análise Modal;
- Simulação de Transitórios Eletromagnéticos.
- Ferramentas de Otimização e Avaliação Probabilística:
 - Fluxo de Potência Ótimo;
 - Fluxo de Potência Probabilístico;
 - Avaliação da Confiabilidade de Sistemas de Geração, Transmissão e Distribuição;
 - Avaliação da Confiabilidade Composta de Sistemas de Geração-Transmissão.
- Estudos/Ferramentas de Planejamento da Expansão:
 - Previsão de Carga a Longo Prazo;
 - Expansão do Sistema de Geração;
 - Expansão do Sistema de Transmissão;
 - Expansão do Sistema de Distribuição.
- Estudos/Ferramentas de Planejamento da Operação:
 - Previsão de Carga a Médio Prazo;
 - Programação Hidrotérmica;
 - Programação da Manutenção;
 - Esquemas de Emergência;
 - Determinação da Reserva Operativa.
- Ferramentas da Operação em Tempo-Real:
 - Sistema de Aquisição de Dados e Supervisão (SCADA);
 - Estimação de Estado e Configuração da Rede;
 - Previsão de Carga a Curto-Prazo;
 - Avaliação Estática e Dinâmica da Segurança.

1.5 Reestruturação dos SEPs

As empresas de energia elétrica em quase todos os países do mundo estão passando por um processo de reestruturação. Essas mudanças iniciaram-se na década de 80 no Reino Unido (Inglaterra, Escócia e País de Gales) e em alguns países da América Latina (Chile, Bolívia, etc.), e foram estendidas a outros países na década de 90. As motivações principais para o

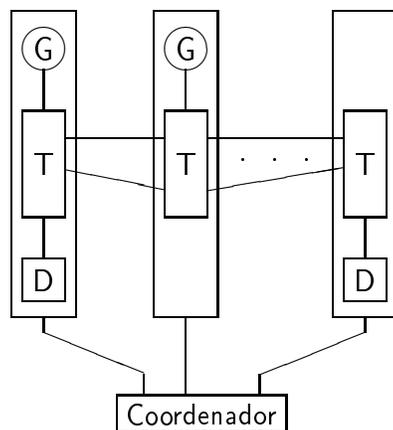


Figura 1.4: Operação do SEP como monopólio regulado

processo de reestruturação do setor elétrico não são necessariamente as mesmas em todos os países. Em alguns casos, como no Reino Unido e países da América Latina, a reestruturação acompanhou o processo de privatização do setor elétrico, direcionado para atrair capitais privados e liberar o governo dos pesados investimentos necessários à expansão do setor. Nos países do Leste Europeu, o processo segue uma tendência generalizada de privatização e descentralização administrativa. Nos Estados Unidos e em outros países, onde as empresas de energia elétrica em sua maior parte já eram empresas privadas, a reestruturação tem como objetivo aumentar a competição e desregulamentação, visando diminuir o custo da energia para o consumidor final e conduzir a uma utilização mais eficiente dos recursos energéticos e melhor preservação do ambiente.

No modelo antigo, as empresas de energia elétrica têm uma estrutura vertical, englobando, na maioria dos casos, os segmentos de geração, transmissão, distribuição e comercialização. Essas empresas recebem uma concessão para o fornecimento de energia para uma determinada região do país e atendem à demanda nessa região usando a energia gerada no seu próprio sistema, ou adquirida de empresas vizinhas, mediante contratos de longo ou curto prazos. Em alguns sistemas, contratos de fornecimento de energia entre empresas não diretamente conectadas eletricamente podem existir, exigindo a transferência de energia através do sistema de transmissão de uma terceira empresa (*wheeling*). O modelo é fortemente regulado e não existe a possibilidade de uma empresa comercializar energia diretamente a consumidores fora de sua área de concessão. Do ponto de vista econômico, o sistema opera como um monopólio regulado. Em geral existe algum mecanismo coordenador da operação do sistema interligado, o qual orienta as diversas empresas com relação ao melhor aproveitamento dos recursos energéticos e confiabilidade do sistema elétrico. Este modelo é ilustrado na figura 1.4.

Uma grande variedade de modelos de reestruturação do setor elétrico têm sido propostos. Na maioria desses modelos, o desmembramento (*unbundling*) dos segmentos de geração, transmissão e distribuição em diferentes empresas, está presente. A transmissão e a distribuição são consideradas monopólios naturais e, em geral, continuam reguladas de maneira a permitir um ambiente competitivo para empresas de geração e comercialização. As empresas de transmissão e distribuição são obrigadas a permitir o acesso ao seu sistema, mediante a cobrança de um serviço de transmissão (pedágio), possibilitando as transações de energia entre quaisquer empresas de geração e comercialização, desde que as restrições operativas do sistema assim o permitam. Em vários países, a operação do sistema é delegada a um ou mais Operadores Independentes do Sistema - OIS (*Independent Systems Operators - ISO*), sem nenhum interesse financeiro no mercado de energia elétrica. O escopo da atuação do OIS, suas atribuições e responsabilidades, variam de um país para outro ou mesmo entre OISs de um mesmo país. No mínimo, o OIS terá um papel semelhante ao do coordenador de operações do modelo antigo. No outro extremo da escala, o OIS pode ser responsável pelo planejamento da expansão da transmissão, planejamento da operação elétrica e energética, e operação em tempo-real. O OIS poderá ou não ser o proprietário dos sistemas de transmissão sob sua responsabilidade. Da mesma forma, o OIS poderá ou não operar o mercado de energia elétrica. Em alguns casos, a operação do mercado é delegada a uma outra entidade denominada de Bolsa de Energia (*Power Exchange - PX*). Em muitos casos, o OIS é responsável por oferecer os chamados Serviços Ancilares (*Ancillary Services*), os quais incluem o controle automático de geração, suporte de reativos, reserva operativa, etc. Em outros casos, o OIS coordena um mercado de Serviços Ancilares providos por outras empresas. Finalmente, o novo modelo geralmente inclui uma agência governamental (Agente Regulador) responsável pelo controle e supervisão do funcionamento do mercado de energia e o cumprimento dos direitos dos consumidores. Uma tentativa de ilustrar o novo modelo dos SEPs é mostrado na Figura 1.5.

1.5.1 Privatização e Reestruturação do Setor Elétrico Brasileiro

Por volta de 1990, o governo brasileiro iniciou um programa de privatização do setor elétrico. Esse programa fez parte do esforço do governo no sentido de atrair capital privado para os setores de infra-estrutura enquanto o governo concentrava suas ações em áreas como educação e saúde. No período 95-98, várias empresas de distribuição de grande porte (Light, Eletropaulo, CPFL, etc.) foram vendidas para grupos formados por investidores nacionais e estrangeiros. No momento, as empresas privadas já detêm 80 % do mercado de distribuição de energia elétrica no país (por energia consumida) e cerca de 15 % da geração de energia elétrica (por energia produzida). Após a mudança

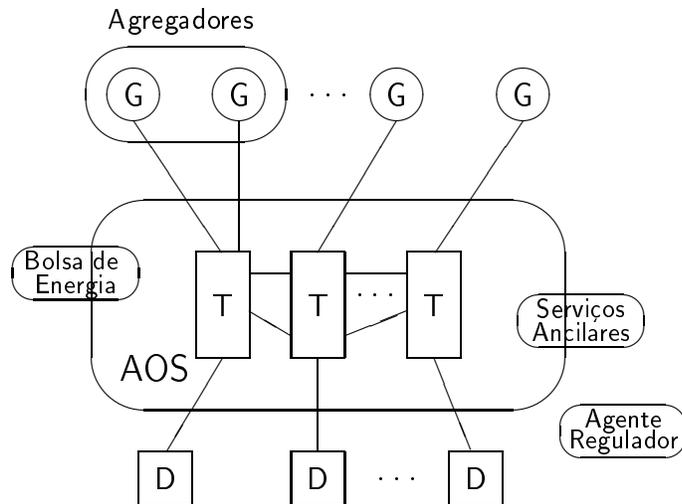


Figura 1.5: Operação do SEP em um ambiente competitivo

de governo em janeiro de 2003, o processo de privatização foi interrompido.

Paralelamente ao processo de privatização, o setor elétrico brasileiro foi submetido a um processo de reestruturação. O modelo antigo, baseado no monopólio estatal, foi substituído por um novo modelo onde existe a competição nos segmentos de geração e comercialização. O processo de reestruturação foi concebido de forma tal que leva em consideração as particularidades já comentadas do sistema brasileiro. Em uma primeira fase do processo, de 1999 a 2004, o novo modelo do sistema elétrico brasileiro previa a existência de um *Mercado Atacadista de Energia* (MAE), no qual os compradores e vendedores de energia elétrica podiam efetuar suas transações e no qual o preço da energia era estabelecido (*preço spot*) através de um processo centralizado de otimização. O MAE foi criado por um acordo multilateral do qual obrigatoriamente participaram todos os geradores com capacidade instalada maior que 50 MW e todos os consumidores com consumo acima de 100 GWh por ano. Grandes consumidores, com consumo acima de 10 MW, puderiam optar por ser membros do MAE.

O modelo contemplava, também, a existência do *Operador Nacional do Sistema Elétrico* (ONS), o qual tem função de operador independente do sistema, com as responsabilidades de realizar o despacho ótimo centralizado, de acordo com as regras aceitas pelo membros do MAE, o qual objetiva a operação do sistema com custo mínimo, mantendo níveis adequados de confiabilidade. Com a finalidade de garantir o cumprimento das leis e acordos que definem o funcionamento do sistema elétrico brasileiro reestruturado, foi criada a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), a entidade reguladora do setor elétrico brasileiro.

Com a mudança de governo em janeiro de 2003, iniciou-se um processo de revisão do modelo do setor elétrico brasileiro, o qual culminou com a promul-

gação da Lei 10.848, em março de 2004, e vários decretos, que estabeleceram um novo marco regulatório. Para fins de comercialização de energia elétrica, o novo modelo prevê a co-existência de dois ambientes de comercialização:

- Ambiente de Contratação Regulada (ACR);
- Ambiente de Contratação Livre (ACL).

Capítulo 2

Modelos de Componentes

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma revisão de modelos de componentes de SEP utilizados em estudos de regime permanente, particularmente no caso do cálculo de fluxo de potência e estudos neste baseado. Na obtenção desses modelos, assume-se que os dispositivos são equilibrados e operados em regime permanente senoidal à frequência industrial (50Hz ou 60Hz). Maiores detalhes com relação aos modelos apresentados neste capítulo podem ser encontrados em [3], [17], [4] e [18].

Os modelos dos seguintes elementos são apresentados a seguir:

- Linhas de transmissão em CA;
- Elos CC;
- Transformadores;
- Geradores e Compensadores Síncronos;
- Bancos de Capacitores e Indutores;
- Compensadores Estáticos;
- Cargas.

2.2 Linhas de Transmissão em CA

Nas aplicações abordadas neste trabalho, as linhas de transmissão em CA são modeladas como um circuito π -equivalente [3], como mostrado na Figura 2.1, cujos parâmetros são dados por:

$$z_{km} = r_{km} + jx_{km} = z_c \sinh(\gamma l) \quad (2.1)$$

$$y_{km}^s = g_{km}^s + jb_{km}^s = \frac{1}{z_c} \tanh(\gamma l/2) \quad (2.2)$$

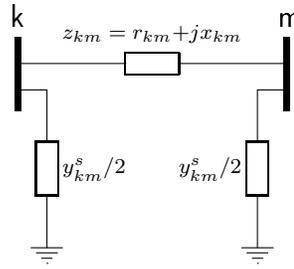


Figura 2.1: Circuito equivalente de linha de transmissão

Tabela 2.1: Valores típicos dos parâmetros de linhas de transmissão

Parâ- metros	Linhas Aéreas		Cabos	
	230 kV	500 kV	230 kV	500 kV
R (Ω/km)	0,050	0,028	0,028	0,128
$x_L = \omega L$ (Ω/km)	0,488	0,325	0,339	0,025
$b_c = \omega C$ ($\mu\Omega^{-1}/km$)	3,371	5,200	245,6	96,5

onde

l : comprimento da linha (km);

$z_c = \sqrt{z/y}$: impedância característica (Ω);

$\gamma = \sqrt{yz}$: constante de propagação;

$z = R + j\omega L$: impedância série (Ω/km);

$y = G + j\omega C$: admitância *shunt* (Ω^{-1}/km).

R, G, L e C nas expressões acima representam, respectivamente, a resistência, a condutância, a reatância e a capacitância por quilometro da linha. O procedimento para cálculo desses parâmetros pode ser encontrado em vários livros textos, por exemplo na referência [17]. Na tabela 2.1 são apresentados parâmetros típicos de linhas aéreas e cabos subterrâneos em CA para vários níveis de tensão [18].

2.3 Elos CC

Um sistema de transmissão em corrente contínua (CC), ou simplesmente um elo CC, é basicamente constituído por:

- Sistema em corrente alternada (AC) supridor;
- Terminal conversor de corrente alternada em contínua (retificador);

- Transformadores com comutação automática sob carga dos conversores;
- Linha de transmissão em corrente contínua;
- Sistema de aterramento
- Terminal conversor de corrente contínua em alternada (inversor);
- Sistema em corrente alternada (AC) receptor.

Os elos CC podem ser configurados de formas distintas, sendo as seguintes as mais utilizadas na prática [18]:

- *Elo Monopolar*: a linha CC utiliza um único condutor, normalmente de polaridade negativa, com retorno pelo solo ou pela água;
- *Elo Bipolar*: a linha CC possui dois condutores, um positivo e outro negativo; cada terminal tem dois conversores idênticos conectados em série e cuja junção é aterrada;
- *Elo Homopolar*: a linha CC possui dois ou mais condutores, todos de mesma polaridade, geralmente negativa, e opera sempre utilizando retorno pelo solo ou pela água.

A Figura 2.2 representa de forma esquemática um elo monopolar e será utilizada como base para a apresentação do modelo de elos CC. Nessa figura o Sistema AC1 é o supridor de potência e o sistema AC2 é o receptor.

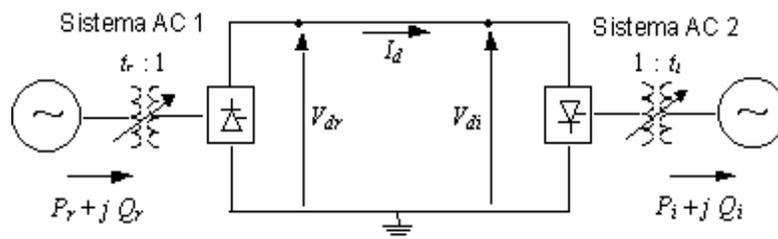


Figura 2.2: Representação esquemática de um elo CC (monopolar)

O desenvolvimento de modelos de elos CC exige a representação detalhada do funcionamento dos conversores e componentes auxiliares. Para efeito de estudos em regime permanente, é suficiente utilizar um modelo do tipo circuito equivalente, como aquele desenvolvido em [21], o qual é mostrado na Figura 2.3.

O modo de operação mais comum de um elo CC é obtido configurando-se o retificador para manter a corrente na linha CC constante e o inversor

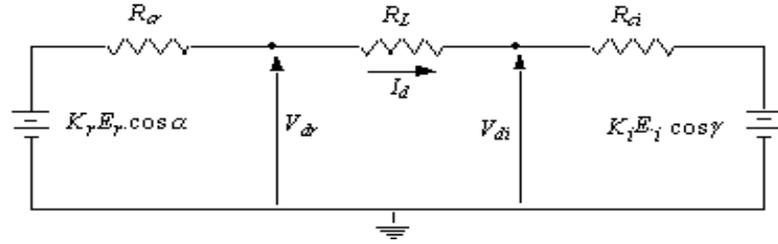


Figura 2.3: Circuito equivalente da linha CC

operando com ângulo de extinção mínimo. Nesta forma de operação, as relações entre as variáveis do circuito equivalente do elo são as seguintes [18]:

Equações do Inversor

$$V_{di} = K_i E_i \cos \gamma_{min} - R_{ci} I_d \quad (2.3)$$

$$K_i = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} b_i t_i \quad (2.4)$$

$$R_{ci} = \frac{3}{\pi} X_{ci} b_i \quad (2.5)$$

$$\phi_i = \cos^{-1}(V_{di}/K_i E_i) \quad (2.6)$$

$$P_i = V_{di} I_d \quad (2.7)$$

$$Q_i = P_i \tan \phi_i \quad (2.8)$$

Equações do Retificador

$$V_{dr} = V_{di} + R_L I_d \quad (2.9)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left[\frac{V_{dr}}{K_r E_r} + \frac{X_{cr} I_d}{\sqrt{2} E_r t_r} \right] \quad (2.10)$$

$$K_r = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} b_r t_r \quad (2.11)$$

$$R_{cr} = \frac{3}{\pi} X_{cr} b_r \quad (2.12)$$

$$\phi_r = \cos^{-1}(V_{dr}/K_r E_r) \quad (2.13)$$

$$P_r = V_{dr} I_d \quad (2.14)$$

$$Q_r = P_r \tan \phi_r \quad (2.15)$$

onde

V_{di} e V_{dr} : tensões na linha CC nos terminais do inversor e do retificador;

E_i e E_r : valores rms das tensões CA nos terminais do inversor e do retificador;

I_d : corrente na linha CC;

R_L : resistência da linha CC;

γ_{min} : valor mínimo do ângulo de extinção do inversor;

b_i e b_r : número de pontes de conversores em série no inversor e no retificador;

t_i e t_r : posições dos taps dos transformadores do inversor e do retificador;

X_{ci} e X_{cr} : reatâncias de comutação, por ponte e por fase, do inversor e do retificador;

P_i e P_r : potência ativa retirada do inversor e injetada no retificador;

Q_i e Q_r : potência reativa demandada pelo conversor e retificador.

Equações similares às mostradas acima podem ser desenvolvidas para outros modos de operação do elo CC e podem ser encontradas na referência [18].

A solução conjunta dos sistemas CA e do elo CC é realizada de forma iterativa, processando-se alternadamente as equações do modelo AC e do modelo CC, considerando-se constantes as variáveis externas do modelos CC e CA, respectivamente. Nos sistemas CA, as variáveis externas consideradas são as tensões E_i e E_r enquanto que no elo CC essas variáveis são P_i , P_r , Q_i e Q_r .

2.4 Transformadores

Na representação de transformadores em estudos de regime permanente é usual desprezar-se as resistências dos enrolamentos, as perdas no núcleo e a influência da corrente de magnetização. Desta forma, o transformador é representado simplesmente por um transformador ideal, com relação de transformação dada por N_p/N_s , em série com sua reatância de dispersão equivalente x_t , como mostrado na Figura 2.4. Esta reatância é obtida através de ensaio de curto-circuito nos terminais do transformador.

Na representação em pu, caso as bases de tensão no primário e secundário do transformador sejam escolhidas com relação igual a N_p/N_s , o transformador ideal desaparece do circuito equivalente o qual apresenta o aspecto mostrado na Figura 2.5.

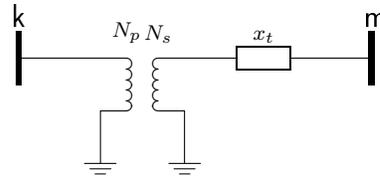


Figura 2.4: Circuito equivalente de transformador

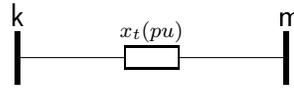


Figura 2.5: Circuito equivalente de transformador em por unidade (pu)

2.4.1 Transformadores com relação de transformação variável sob carga

Suponha uma relação de transformação genérica dada por:

$$a = N_p/N_s = t e^{j\phi} \quad (2.16)$$

Dependendo dos valores assumidos por t e ϕ , teremos a seguinte correspondência com o componente a ser representado:

- $\phi = 0$ e $t \neq 0 \Rightarrow$ Transformador com variação automática de *tap* sob carga (LTC¹);
- $t = 1$ e $\phi \neq 0 \Rightarrow$ Transformador defasador².

Do circuito equivalente do transformador mostrado na Figura 2.6, onde a reatância x_t foi substituída por uma admitância genérica y , temos:

$$V_p I_p^* = E_s (-I_s^*) \quad (2.17)$$

¹*Load Tap Changer*: são utilizados como elementos de controle de tensão ou de fluxo de reativos.

²Os transformadores defasadores são usados para controlar o fluxo de potência ativa em um circuito.

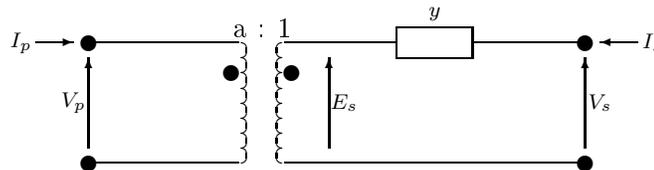


Figura 2.6: Circuito equivalente do transformador

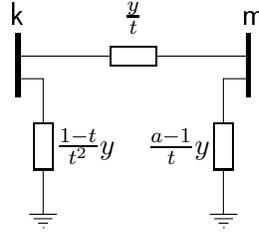


Figura 2.7: Circuito equivalente de transformador com variação automática de *tap* sob carga

$$\frac{V_p}{E_s} = -\frac{I_s^*}{I_p^*} = a \quad (2.18)$$

$$I_s = -y(E_s - V_s) = -y\left(\frac{V_p}{a} - V_s\right) \quad (2.19)$$

$$I_p = \frac{y}{a^*}(E_s - V_s) = \frac{y}{a^*}\left(\frac{V_p}{a} - V_s\right) \quad (2.20)$$

as quais podemos reunir na forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_s \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1/aa^* & -1/a^* \\ -1/a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

No caso dos LTC's ($\phi = 0, a = t$), temos

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_s \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1/t^2 & -1/t \\ -1/t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e no caso dos transformadores defasadores ($t = 1, a = e^{j\phi}$), temos

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I_s \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 & -e^{j\phi} \\ -e^{-j\phi} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

No caso dos LTC's, a partir da equação (2.22) é possível sintetizar o modelo π -equivalente mostrado na Figura 2.7. O mesmo não é possível para o caso dos transformadores defasadores devido à assimetria da matriz presente na equação (2.23).

2.4.2 Transformadores trifásicos

Os transformadores trifásicos, no caso de operação em condições equilibradas, utilizam uma representação do modelo de sequência positiva idêntico àquela mostrada nos itens anteriores.

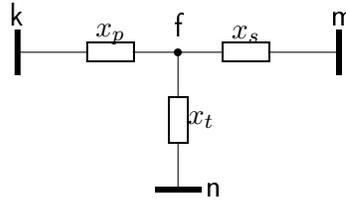


Figura 2.8: Circuito equivalente de transformador com três enrolamentos

2.4.3 Transformadores com três enrolamentos

Transformadores com três enrolamentos são, normalmente, representados por circuitos em estrela como mostrado na Figura 2.8. Essa representação introduz um nó fictício na rede (nó f) o qual não existe fisicamente no transformador. Os parâmetros do circuito equivalente da Figura 2.8 são obtidos a partir dos valores das reatâncias de dispersão entre os enrolamentos (x_{ps} , x_{pt} e x_{st}) as quais são obtidas através de ensaios de curto-circuito em pares de enrolamentos, com o terceiro enrolamento aberto.

Os valores de x_p , x_s e x_t são obtidas resolvendo-se o seguinte sistema de equações

$$x_p + x_s = x_{ps} \quad (2.24)$$

$$x_p + x_t = x_{pt} \quad (2.25)$$

$$x_s + x_t = x_{st} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

de onde resulta

$$x_p = \frac{1}{2}(x_{ps} + x_{pt} - x_{st}) \quad (2.28)$$

$$x_s = \frac{1}{2}(x_{ps} + x_{st} - x_{pt}) \quad (2.29)$$

$$x_t = \frac{1}{2}(x_{pt} + x_{st} - x_{ps}) \quad (2.30)$$

Deve-se notar que, de acordo com (2.28), (2.29) e (2.30), é possível que existam reatâncias negativas na representação da Figura 2.8.

2.5 Geradores e Compensadores Síncronos

O circuito equivalente normalmente usado para representar máquinas síncronas, em análise de regime permanente, é uma fonte de tensão constante em série com uma impedância como mostrado na Figura 2.9(a). A Figura 2.9(b) apresenta o mesmo circuito equivalente usando uma fonte de corrente

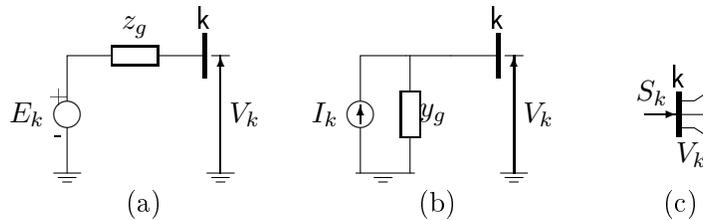


Figura 2.9: Modelo de gerador ou compensador síncrono

em paralelo com uma admitância. A Figura 2.9(c) apresenta o modelo de gerador ou compensador síncrono normalmente utilizado em estudos de fluxo de potência o qual é derivado do circuito equivalente da máquina síncrona através da relação:

$$S_k = V_k I_k^* = P_k + jQ_k \quad (2.31)$$

Usando o modelo da Figura 2.9(c) e equação (2.31), o gerador pode ser modelado como uma fonte de potência ativa e reativa constantes (P_k e Q_k especificados) ou como uma fonte de potência ativa constante e controlador ideal de tensão (P_k e V_k especificados). Em ambas as situações, as variáveis não-especificadas do modelo, V_k no primeiro caso e Q_k no segundo, somente podem assumir valores em um intervalo (limites operativos). No caso do compensador síncrono, adota-se a segunda formulação com $P_k = 0$.

2.6 Bancos de Capacitores e Indutores

Os bancos de capacitores e indutores são representados por valores fixos de reatâncias indutivas ou capacitivas conectadas entre as barras e a referência como mostrado na Figura 2.10.



Figura 2.10: Circuito equivalente de bancos de capacitores e indutores

2.7 Compensadores Estáticos

Os compensadores estáticos são bancos de capacitores e/ou indutores chaveados eletronicamente. A denominação estático vem do fato de, contrariamente

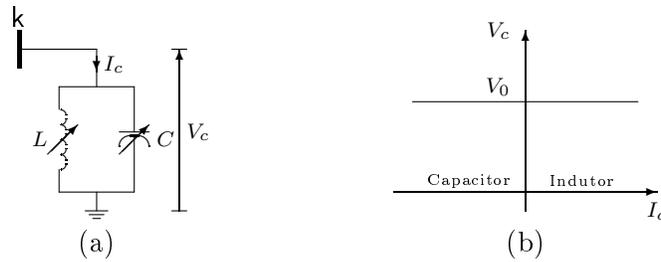


Figura 2.11: Compensador estático ideal

ao que acontece com os compensadores síncronos, estes dispositivos não possuem partes móveis. Exemplos de compensadores estáticos são:

- Reator controlado por tiristores (TCR);
- Capacitor chaveado por tiristores (TSC);
- Reator chaveado por tiristores (TSR).

A combinação de compensadores estáticos com bancos de capacitores e indutores chaveados mecanicamente produz os chamados sistemas de compensação estática.

O desempenho de um compensador estático ideal é mostrado na Figura 2.11. As Figuras 2.12 e 2.13 mostram as características de funcionamento de um sistema de compensação estática formado por um reator controlado e um capacitor fixo.

Em estudos de fluxo de potência, os compensadores estáticos são modelados da seguinte maneira [26]:

- *Operação entre limites*: fonte de tensão (V_0) em série com reatância representando a inclinação da curva característica (Figura 2.13-c).
- *Operação fora dos limites*: reator/capacitor fixo.

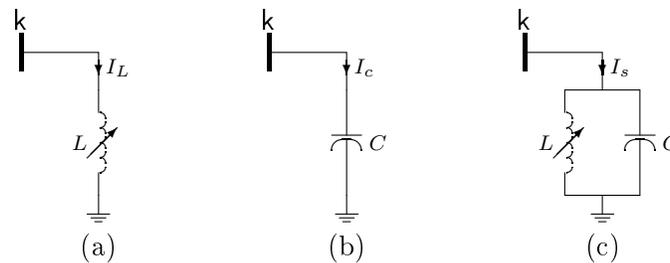


Figura 2.12: Compensador estático real composto de reator controlado e capacitor fixo

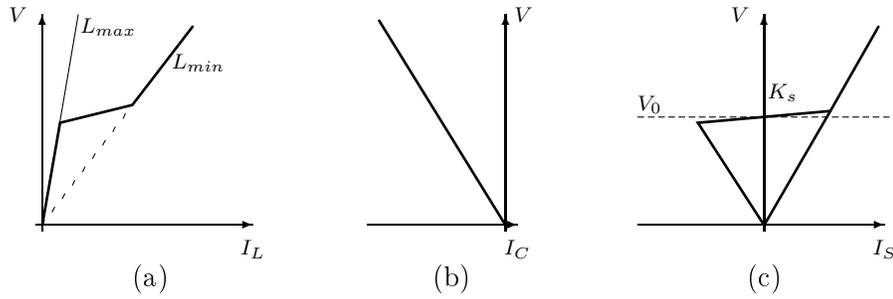


Figura 2.13: Característica do compensador estático composto

2.8 Cargas

As cargas conectadas a um sistema de potência são formadas por agregados de milhares de dispositivos tais como motores (de indução, na maioria dos casos), dispositivos de iluminação e aparelhos elétricos em geral. Esses agregados são geralmente modelados como uma carga concentrada equivalente em uma barra do sistema de transmissão. Nesta carga estão representados, também, os efeitos do sistema de subtransmissão e distribuição (linhas, cabos, dispositivos de compensação de reativos, etc.). A potência consumida pela carga varia com a tensão e a frequência de maneira diferente para os diversos componentes da mesma.

Nas seções seguintes são apresentados os modelos de carga geralmente utilizados em estudos de regime permanente [13].

2.8.1 Modelo Composto - ZIP

A carga é representada por um modelo composto com diferentes proporções de carga dos tipos impedância, corrente e potência constantes. Esse modelo é conhecido como modelo ZIP (Z: impedância, I: corrente e P: potência) e é definido por

$$P = P_0 \left[p_1 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 + p_2 \left(\frac{V}{V_0} \right) + p_3 \right] \quad (2.32)$$

$$Q = Q_0 \left[q_1 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 + q_2 \left(\frac{V}{V_0} \right) + q_3 \right] \quad (2.33)$$

$$(2.34)$$

onde $p_i, q_i, i = 1, 2, 3$ são ponderações que definem a proporção de cada componente do modelo.

Tabela 2.2: Modelos de cargas

Expoente	Tipo de Carga	Modelo
0	Potência Constante	$P = P_0$
1	Corrente Constante	$P = V \frac{P_0}{V_0} = VI_0$
2	Impedância Constante	$P = V^2 \frac{P_0}{V_0^2} = V^2/Z_0^2$

Tabela 2.3: Valores típicos dos expoentes dos modelos de cargas

	a	b
Grande Motor	0,05	0,50
Lâmpada Fluorescente	1,00	3,00
Lâmpada Incandescente	1,55	0

2.8.2 Modelo Exponencial

O modelo exponencial para as componentes ativa e reativa da carga é dado por:

$$P = P_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^a \quad (2.35)$$

$$Q = Q_0 \left(\frac{V}{V_0} \right)^b \quad (2.36)$$

onde P_0 , Q_0 e V_0 são valores nominais da carga ativa e reativa e da tensão e P e Q são os valores dessas cargas para a tensão V .

Dependendo do valor assumido pelos expoentes em (2.35) e (2.36) os modelos têm o significado físico apresentado na Tabela 2.2. Os componentes reais da carga não se ajustam perfeitamente a esses modelos sendo típicos os valores mostrados na Tabela 2.3.

Problemas

1. Para a linha de transmissão cujos dados são fornecidos a seguir:
 - (a) Estabeleça o circuito π -equivalente
 - (b) Calcule a tensão no terminal receptor para valores crescentes da carga supondo que a tensão no terminal transmissor é fixa em 1,0 pu. Considere um valor inicial da carga de $100 + j 70$ MVA e acréscimos de 10 MW mantendo constante o fator de potência.

Dados da linha:

Base de potência do sistema: 100 MVA

Comprimento: 500 km

Tensão nominal: 345 kV

Resistência (Ω/km): 0,040

Reatância indutiva (Ω/km): 0,400

Susceptância capacitiva (Ω^{-1}/km): $4,500 \times 10^{-6}$

2. Estabeleça os modelo (em pu) dos transformadores cujos dados são fornecidos a seguir para utilização em estudos de fluxo de potência.

Transformador 1: LTC

Capacidade nominal: 350 MVA

Tensão nominal do primário: 230 kV

Tensão nominal do secundário: 13,2 kV

Reatância de dispersão equivalente: 10 %

Base de potência do sistema: 100 MVA

Varição de tap sob carga no enrolamento de baixa tensão: $\pm 1,32$ kV em 16 passos

Transformador 2: Transformador defasador

Capacidade nominal: 300 MVA

Tensão nominal do primário: 230 kV

Tensão nominal do secundário: 230 kV

Reatância de dispersão equivalente: 10 %

Base de potência do sistema: 100 MVA

Varição do defasamento angular: $\pm 40^\circ$ em 36 passos

Capítulo 3

Fluxo de Potência

3.1 Introdução

O estudo de fluxo de potência ou fluxo de carga consiste na solução em regime permanente de uma rede elétrica de potência para uma dada condição de carga e geração. A solução do fluxo de potência corresponde a uma situação hipotética de carga constante a qual nunca acontece na operação do sistema. Entretanto, esse tipo de estudo é muito importante para a representação de condições limites na operação da rede tais como a operação em carga máxima, carga mínima, etc.

A condição de carga e geração é caracterizada pela definição da carga ativa e reativa em todos os nós ou barras da rede, e correspondentes valores de geração ativa e reativa naqueles nós onde geradores estão disponíveis, com exceção de, no mínimo, um nó ao qual são alocadas as perdas na transmissão. Limites na capacidade de componentes do sistema e no valor de algumas variáveis são também representados, assim como certos dispositivos de controle dos fluxos de potência ativa e reativa do sistema.

Por se tratar de uma solução em regime permanente, o problema de fluxo de potência é modelado por um conjunto de equações e inequações algébricas. Essas equações e inequações são não-lineares pelo fato da geração e cargas serem, em parte, modeladas como fontes de potência constante ou por funções das tensões nodais.

O estudo de fluxo de potência tem aplicação direta no planejamento da expansão, no planejamento da operação e no controle em tempo-real do sistema elétrico de potência. Nessas aplicações se faz necessária a obtenção de soluções de regime permanente da rede para se avaliar o desempenho da mesma com relação a níveis de tensões, fluxos nas linhas, etc., tanto para a configuração normal quanto para casos de contingências. O cálculo do fluxo da potência é também necessário como elemento auxiliar em estudos de curto-circuito, estabilidade, otimização, confiabilidade, etc.

3.2 Formulação do Problema

A formulação do problema de fluxo de potência envolve aspectos de modelagem da rede de transmissão ou distribuição, das cargas e geração e considerações sobre certas características operativas do sistema. O resultado dessa combinação resulta em um conjunto de equações e inequações algébricas não-lineares.

3.2.1 Modelo da Rede

A rede elétrica é, para efeito de estudos de fluxo de potência, geralmente considerada como sendo constituída por elementos trifásicos equilibrados¹ (linhas, transformadores, etc.). O mesmo acontece com as cargas e a geração. Conseqüentemente, a rede pode ser analisada usando-se uma representação monofásica com os parâmetros de seqüência positiva.

Os elementos constituintes da rede têm o formato geral mostrado na Figura 3.1 e na Tabela 3.1. Através desse elemento genérico pode-se representar linhas de transmissão, transformadores com ou sem comutação automática de *tap*, elementos *shunt* (reatores, capacitores, etc.). Os transformadores defasadores, por introduzirem assimetria na representação da rede, não se incluem nessa representação e devem receber um tratamento especial como visto no Capítulo 2.

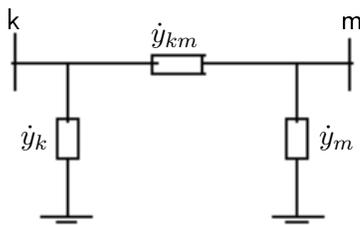


Figura 3.1: Formato geral dos elementos da rede

Os elementos da Figura 3.1 e Tabela 3.1 têm o seguinte significado

$$\dot{y}_{km} = g_{km} + jb_{km} = 1/\dot{z}_{km} \quad (3.1)$$

$$\dot{z}_{km} = r_{km} + jx_{km} \quad (3.2)$$

onde

- r_{km} resistência da linha ou transformador;
- x_{km} reatância da linha ou transformador;
- y_s susceptância total da linha ou do elemento *shunt* (reator ou capacitor);
- t posição do *tap* do LTC.

¹Em algumas aplicações específicas é importante a utilização de uma modelagem trifásica da rede elétrica permitindo a representação de elementos desequilibrados. Um exemplo importante é o caso de redes de distribuição de energia elétrica.

Admitância	Linha	Transformador	<i>Shunt</i>
g_{km}	$\frac{r_{km}}{ z_{km} ^2}$	$\frac{r_{km}}{ z_{km} ^2}t$	0
b_{km}	$\frac{-x_{km}}{ z_{km} ^2}$	$\frac{-x_{km}}{ z_{km} ^2}t$	0
y_k	$\frac{y_s}{2}$	$\frac{1-t}{t^2} \frac{z_{km}^*}{ z_{km} ^2}$	y_s +
y_m	$\frac{y_s}{2}$	$\frac{t-1}{t} \frac{z_{km}^*}{ z_{km} ^2}$	y_s +

+O valor será y_s ou zero dependendo do nó onde o elemento está conectado

Tabela 3.1: Valores das impedâncias do elemento genérico da rede

A rede constituída pelos elementos genéricos definidos acima é, então, representada pelas Equações Nodais²

$$\dot{\mathbf{i}} = \dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{V}} \quad (3.3)$$

onde

- $\dot{\mathbf{i}}$ vetor das somas das correntes injetadas nos nós pelas fontes de corrente;
- $\dot{\mathbf{V}}$ vetor das tensões nodais;
- $\dot{\mathbf{Y}}$ matriz admitância nodal cujos elementos são, genericamente, representados por $\dot{Y}_{km} = G_{km} + jB_{km}$.

Os elementos da matriz de admitância nodal são definidos como

\dot{Y}_{kk} = soma das admitâncias conectadas ao nó k ;

\dot{Y}_{km} = negativo da admitância conectada entre os nós k e m .

A potência aparente líquida injetada em uma barra é relacionada com as tensões em todas as barras da rede através de

$$P_k + jQ_k = \dot{V}_k \dot{I}_k^* = \dot{V}_k \left(\sum_{m \in \Omega_k} \dot{V}_m^* \dot{Y}_{km}^* \right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

$$P_k = P_{G_k} - P_{L_k} \quad (3.5)$$

$$Q_k = Q_{G_k} - Q_{L_k} \quad (3.6)$$

²Uma derivação das equações nodais pode ser encontrada, por exemplo, em [17].

onde

P_k	potência ativa líquida injetada na barra k ;
Q_k	potência reativa líquida injetada na barra k ;
P_{G_k}	potência ativa gerada na barra k ;
Q_{G_k}	potência reativa gerada na barra k ;
P_{L_k}	potência ativa consumida na barra k ;
Q_{L_k}	potência reativa consumida na barra k ;
\dot{V}_k	tensão da barra k ;
Ω_k	conjunto das barras diretamente ligadas a k , incluindo k .

3.2.2 Tipos de Barras

Definidas as cargas e as gerações em cada barra do sistema (condição de carga e geração) e o modelo da rede (matriz \mathbf{Y}), o problema de fluxo de potência estaria, em princípio, perfeitamente definido. Isto não acontece devido ao fato das perdas não serem conhecidas exatamente antes de se conhecer a solução do fluxo de potência. A soma da geração em todas as barras do sistema deve ser igual à carga total do sistema mais as perdas. Como estas não são conhecidas, é necessário prever uma folga na geração de maneira a acomodar as perdas. Isto é obtido deixando não especificada a geração ativa e reativa em pelo menos uma das barras do sistema, a qual recebe a designação de *Barra Flutuante*, *Swing* ou *Slack*. Esse fato é ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3.1 Considere o sistema de 3 barras mostrado na Figura 3.2. As equações básicas do fluxo de potência nesse sistema são

$$\begin{aligned} P_{G_1} + j Q_{G_1} &= \dot{V}_1 [\dot{Y}_{11} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{12} \dot{V}_2 + \dot{Y}_{13} \dot{V}_3]^* \\ P_{G_2} + j Q_{G_2} &= \dot{V}_2 [\dot{Y}_{21} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{V}_2 + \dot{Y}_{23} \dot{V}_3]^* \\ -P_{L_3} - j Q_{L_3} &= \dot{V}_3 [\dot{Y}_{31} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{32} \dot{V}_2 + \dot{Y}_{33} \dot{V}_3]^* \end{aligned}$$

Nas equações acima, os elementos de \mathbf{Y} e as cargas e gerações (P_{G_1} , Q_{G_1} , ...) são conhecidos. As tensões nodais (\dot{V}_1 , \dot{V}_2 e \dot{V}_3) são as incógnitas

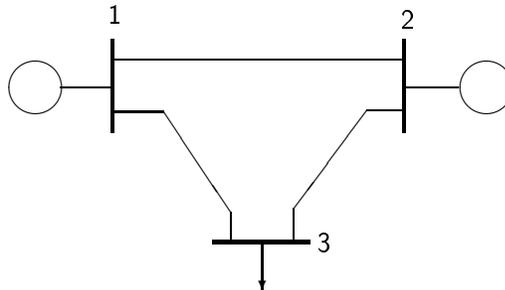


Figura 3.2: Sistema usado no Exemplo 3.1

do problema. Existem, ainda, duas incógnitas implícitas: as perdas ativas e reativas totais. Sem o conhecimento dessas, não é possível “fechar” o balanço de potência no sistema. Isso fica claro na equação abaixo correspondente ao balanço de potência ativa

$$P_{G_1} + P_{G_2} = P_{L_3} + P_L$$

onde P_L representa as perdas ativas totais do sistema. Para se conhecer os valores das perdas, entretanto, precisamos conhecer a solução do fluxo de potência. Ou seja, para formular corretamente o problema é necessário conhecer a solução do problema!

A solução clássica do “dilema” acima consiste na introdução do conceito de “Barra Flutuante”, isto é, uma barra onde deixa-se “em aberto” os valores da potência ativa e reativa injetadas na rede³. Em termos matemáticos, isto equivale a retirar uma das equações do conjunto acima. Supondo que a barra escolhida como barra flutuante seja a de número 1, então o novo sistema de equações será

$$\begin{aligned} P_{G_2} + j Q_{G_2} &= \dot{V}_2 [\dot{Y}_{21} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{V}_2 + \dot{Y}_{23} \dot{V}_3]^* \\ -P_{L_3} - j Q_{L_3} &= \dot{V}_3 [\dot{Y}_{31} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{32} \dot{V}_2 + \dot{Y}_{33} \dot{V}_3]^* \end{aligned}$$

Nesse novo sistema de equações o balanço de potência não precisa ser atendido. A diferença será suprida por P_{G_1} e Q_{G_1} . Para compensar a diminuição de uma equação, deve-se fixar o valor de uma das incógnitas. Por razões de ordem prática, a tensão escolhida é a da barra flutuante. Nessas condições, o sistema de equações acima pode ser resolvido para as variáveis \dot{V}_2 e \dot{V}_3 . Em seguida, podemos calcular as injeções de potência ativa e reativa na barra flutuante usando a equação deixada de fora, ou seja,

$$P_{G_1} + j Q_{G_1} = \dot{V}_1 [\dot{Y}_{11} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{12} \dot{V}_2 + \dot{Y}_{13} \dot{V}_3]^*$$

Como mostrado no exemplo anterior, a tensão (em módulo e ângulo de fase) da barra flutuante deve ser especificada, isto é, fornecida como um dado para o problema de fluxo de potência. Por essa razão, e pelo fato das perdas totais serem alocadas à mesma, a barra flutuante deve ser uma barra na qual está conectada um gerador capaz de fornecer potência à rede e regular a tensão em seus terminais. Como o ângulo de fase da tensão nessa barra também é especificado, a tensão da barra flutuante passa a exercer o papel de referência angular do sistema. É possível, porém nem sempre necessário, utilizar-se mais de uma barra flutuante na formulação do problema de fluxo de potência. As situações que justificam a utilização de múltiplas barras flutuantes serão abordadas em seções seguintes destas notas de aula.

³Nos casos práticos, o balanço de potência reativa é realizado de forma distribuída pela introdução das chamadas *Barras de Tensão Controlada*, como veremos a seguir.

Além da barra flutuante, é usual introduzir-se um outro tipo especial de barra no estudo de fluxo de potência na qual o módulo da tensão é especificado. Esse tipo de barra tem por finalidade representar a ação de equipamentos com capacidade de regulação de tensão (geradores, compensadores síncronos e estáticos, etc.). Esse tipo de barra recebe a denominação de *Barra de Tensão Controlada*. As barras de tensão controlada tem um papel importante na determinação do perfil de tensão do sistema e, como veremos em seções seguintes, influenciam de forma significativa as características de convergência dos métodos de solução do fluxo de potência.

A cada barra do sistema estão associadas quatro variáveis: P_k , Q_k , V_k , e θ_k . P_k e Q_k são, respectivamente, as componentes ativa e reativa da potência líquida (geração menos carga) injetada na barra. V_k e θ_k são, respectivamente o módulo e ângulo de fase da tensão na k -ésima barra do sistema. As tensões podem também ser representadas na forma retangular e, neste caso V_k e θ_k seriam substituídos por e_k e f_k , respectivamente, as partes reais e imaginárias da tensão.

As quatro variáveis associadas a cada barra da rede estão relacionadas com as demais variáveis do modelo através da equação (3.4) a qual define um conjunto de $2n$ ($n =$ número de barras) equações em variáveis reais⁴. Como existem $4n$ variáveis reais, para que o problema de fluxo de potência tenha solução é necessário especificar o valor de $2n$ dessas variáveis. Dependendo da escolha dessas variáveis, as barras do sistema, para efeito de estudo de fluxo de potência, são classificados de acordo com a Tabela 3.2. Nessa tabela também é apresentada uma denominação sintética para os diversos tipos de barras ($V\theta$, PV e PQ) normalmente utilizada na prática e baseada nas variáveis especificadas em cada tipo de barra.

Tipo	Nome	Variáveis Especificadas	Variáveis Calculadas	Características
Flutuante, <i>Slack</i> ou <i>Swing</i>	$V\theta$	V_k, θ_k	P_k, Q_k	Usada para o balanço de potência. Referência angular.
Tensão Controlada	PV	P_k, V_k	θ_k, Q_k	Barras de geração ou nas quais existe algum dispositivo de controle de tensão.
Carga	PQ	P_k, Q_k	V_k, θ_k	Demais barras.

Tabela 3.2: Tipos de barras

⁴A formulação explícita dessas equações será apresentada na seção seguinte

3.2.3 Conjunto Básico de Equações

A equação (3.4) pode se reescrita, separando-se as componentes reais e imaginárias, como

$$P_k = \Re \left\{ \dot{V}_k \sum_{m \in \Omega_k} \dot{V}_m^* \dot{Y}_{km}^* \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

$$Q_k = \Im \left\{ \dot{V}_k \sum_{m \in \Omega_k} \dot{V}_m^* \dot{Y}_{km}^* \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

Expressando as tensões em sua forma polar, as equações (3.7) e (3.8) podem ser representadas de forma compacta por

$$P_k = g_{p_k}(\Theta, \mathbf{V}) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sen \theta_{km}) \quad (3.9)$$

$$Q_k = g_{q_k}(\Theta, \mathbf{V}) = V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sen \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \quad (3.10)$$

onde

- Θ vetor cujas componentes são os ângulos de fase das tensões nodais;
- \mathbf{V} vetor cujas componentes são os módulos das tensões nodais;
- θ_k ângulo de fase da tensão da barra k ;
- V_k módulo da tensão da barra k ;

e

$$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m \quad (3.11)$$

No caso das tensões nodais serem expressas em sua forma retangular, as expressões seguintes devem ser utilizadas

$$\begin{aligned} P_k &= g'_{p_k}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \\ &= \sum_{m \in \Omega_k} [e_k(G_{km}e_m - B_{km}f_m) + f_k(G_{km}f_m + B_{km}e_m)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= g'_{q_k}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \\ &= \sum_{m \in \Omega_k} [f_k(G_{km}e_m - B_{km}f_m) - e_k(G_{km}f_m + B_{km}e_m)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

- \mathbf{e} vetor cujas componentes são a parte real das tensões nodais;
- \mathbf{f} vetor cujas componentes são parte imaginária das tensões nodais;
- e_k parte real da tensão da barra k ;
- f_k parte imaginária da tensão da barra k .

Os principais métodos de solução do problema de fluxo de potência usados atualmente dividem as equações definidas em (3.9) e (3.10), ou (3.12) e (3.13), em dois subconjuntos [20]:

- *Subconjunto 1*: contém as equações relativas às injeções de potência ativa e reativa nas barras de carga e as equações correspondentes às injeções de potência ativa nas barras de tensão controlada;
- *Subconjunto 2*: reúne as demais equações, ou seja, aquelas não incluídas no primeiro subconjunto.

Essa divisão é utilizado pelo fato de que no Subconjunto 1 as variáveis a serem calculadas são funções implícitas das variáveis especificadas. Portanto, existe a necessidade de resolver esse conjunto de equações utilizando algum método de solução de equações algébricas não-lineares. Isso não acontece com as equações do Subconjunto 2 nas quais, após a solução do Subconjunto 1, as variáveis a serem calculadas são funções explícitas das variáveis conhecidas. Esse fato será ilustrado através do seguinte exemplo.

Exemplo 3.2 *Considere o sistema de cinco barras dado na Figura 3.3, com as respectivas definições dos tipos de barras. Para esse exemplo, os vetores Θ e \mathbf{V} são definidos por*

$$\begin{aligned}\Theta &= [\theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]^T \\ \mathbf{V} &= [V_3 \ V_4 \ V_5]^T\end{aligned}$$

A partir dessa definição de variáveis, os subconjuntos de equações a serem resolvidos são estabelecidos como a seguir:

<i>Subconjunto 1</i>	<i>Subconjunto 2</i>
$P_2 = g_{p_2}(\Theta, \mathbf{V})$	$P_1 = g_{p_1}(\Theta, \mathbf{V})$
$P_3 = g_{p_3}(\Theta, \mathbf{V})$	$Q_1 = g_{q_1}(\Theta, \mathbf{V})$
$Q_3 = g_{q_3}(\Theta, \mathbf{V})$	$Q_2 = g_{q_2}(\Theta, \mathbf{V})$
$P_4 = g_{p_4}(\Theta, \mathbf{V})$	
$Q_4 = g_{q_4}(\Theta, \mathbf{V})$	
$P_5 = g_{p_5}(\Theta, \mathbf{V})$	
$Q_5 = g_{q_5}(\Theta, \mathbf{V})$	

Para efeito de ilustração, duas das funções utilizadas nas equações acima serão escritas por extenso:

$$g_{p_3}(\Theta, \mathbf{V}) = V_3^2 G_{33} + V_3 V_1 (G_{31} \cos \theta_{31} + B_{31} \sin \theta_{31}) + V_3 V_2 (G_{32} \cos \theta_{32}$$

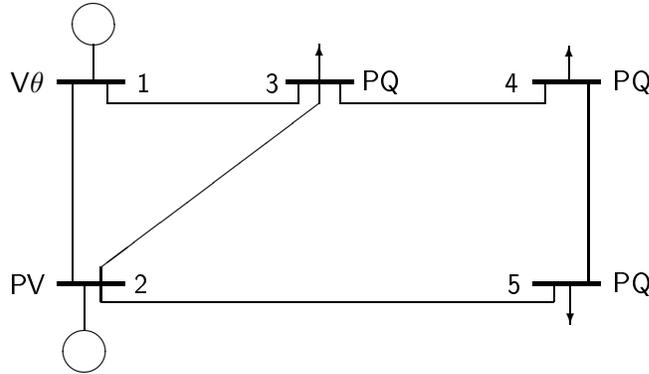


Figura 3.3: Sistema usado no exemplo 3.2

$$\begin{aligned}
 g_{q_3}(\Theta, \mathbf{V}) &= + B_{32} \text{sen } \theta_{32}) + V_3 V_4 (G_{34} \cos \theta_{34} + B_{34} \text{sen } \theta_{34}) \\
 &= -V_3^2 B_{33} + V_3 V_1 (G_{31} \text{sen } \theta_{31} - B_{31} \cos \theta_{31}) + V_3 V_2 (G_{32} \text{sen } \theta_{32} \\
 &\quad - B_{32} \cos \theta_{32}) + V_3 V_4 (G_{34} \text{sen } \theta_{34} - B_{34} \cos \theta_{34})
 \end{aligned}$$

As funções acima foram simplificadas observando-se que $\theta_{33} = 0$.

3.3 Solução do Problema

A solução do problema de fluxo de potência consiste de duas fases:

- Solução do Subconjunto 1 de equações por um processo iterativo visando o cálculo das componentes dos vetores Θ e \mathbf{V} ;
- Substituição dos valores de Θ e \mathbf{V} nas equações do Subconjunto 2 com o objetivo de se calcular os valores das injeções líquidas de potência ativa e reativa na barra flutuante e das injeções líquidas de potência reativa nas barras de tensão controlada.

Devido à necessidade de se representar os limites operativos dos componentes do sistema e dispositivos de controle, nos casos práticos existe, ainda, a necessidade de se realizar ajustes e mudanças de variáveis durante o processo de solução. Esses ajustes correspondem à implementação das inequações presentes na formulação do problema de fluxo de potência como citado no início desse capítulo. Esse fato será descrito em seções seguintes destas notas de aula.

3.4 Métodos de Solução

Os métodos de solução de fluxo de potência [23] podem ser classificados em três categorias as quais, em ordem cronológica de aparecimento na literatura, são

1. Métodos Baseados na Matriz \mathbf{Y}

Esses métodos são baseados na solução iterativa do sistema de equações definido em (3.3). A partir dos valores especificados das injeções de potência ativa e reativa e de uma estimativa inicial das tensões nodais, calcula-se o vetor de correntes injetadas. A substituição desse vetor em (3.3) produzirá o novo valor das tensões e assim sucessivamente. Dentre os algoritmos que utilizam \mathbf{Y} , o mais conhecido é o de Gauss-Seidel que será descrito na seção seguinte. A convergência desse método é bastante lenta devido à fraca interação entre as variáveis (\mathbf{Y} é esparsa) e às vezes bastante difícil em sistemas mal-condicionados.

2. Métodos Baseados na Matriz \mathbf{Z}

Para contornar os problemas de convergência dos métodos baseados em \mathbf{Y} foram testados com sucesso esquemas iterativos utilizando sua inversa \mathbf{Z} . Esses métodos têm convergência rápida e confiável para a maioria dos problemas práticos porém introduzem o problema de se montar e armazenar a matriz \mathbf{Z} . Além disso, o tratamento de barras de tensão controlada é difícil e ineficiente do ponto de vista computacional.

3. Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson para solução de equações algébricas não lineares é um método clássico de reconhecida eficiência no cálculo numérico. Sua aplicação na solução do problema de fluxo de potência somente tornou-se prática com a introdução dos métodos de solução de sistemas de equações lineares com matrizes de coeficientes esparsas por fatorização triangular *otimamente* ordenada⁵ [28, 27]. A partir dessa idéia básica, diferentes versões de algoritmos para o problema de fluxo de potência, baseados no método de Newton-Raphson, foram desenvolvidos e são considerados atualmente os mais eficientes para solução desse problema.

3.4.1 Critério de Precisão da Solução

Para se interromper o processo iterativo de solução do fluxo de potência é necessário definir um critério ou regra de parada, o qual medirá quão próximo da solução exata se encontram os valores presentes das tensões nodais.

O critério normalmente utilizado na prática é o dos Resíduos de Potência (*Power Mismatches*), os quais são definidos por

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - g_{p_k}(\Theta, \mathbf{V}) \quad k \in \Omega_{PQ} \cup \Omega_{PV} \quad (3.14)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - g_{q_k}(\Theta, \mathbf{V}) \quad k \in \Omega_{PQ} \quad (3.15)$$

⁵Esses métodos são apresentados no Apêndice A destas notas.

onde

- Ω_{PQ} conjunto das barras PQ ;
- Ω_{PV} conjunto das barras PV ;
- P_k^{esp} potência ativa líquida especificada na barra k ;
- Q_k^{esp} potência reativa líquida especificada na barra k ;

O processo iterativo deve ser terminado quando⁶

$$\|\Delta \mathbf{P}\|_{\infty} \leq \varepsilon_p \quad (3.16)$$

$$\|\Delta \mathbf{Q}\|_{\infty} \leq \varepsilon_q \quad (3.17)$$

onde

$$\Delta \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \Delta P_1 & \Delta P_2 & \dots \end{bmatrix}^T \quad (3.18)$$

$$\Delta \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 & \Delta Q_2 & \dots \end{bmatrix}^T \quad (3.19)$$

e ε_p e ε_q são tolerâncias tipicamente no intervalo de 0,01 a 10 MW/MVAR.

Em alguns métodos de solução, por exemplo no método de Gauss-Seidel, onde o cálculo dos Resíduos de Potência implicaria em um aumento excessivo de tempo por iteração, testes baseados na variação do valor das tensões são utilizados.

3.4.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel para solução do fluxo de potência é um dos mais antigos encontrados na literatura. Sua importância atual é apenas histórica e didática pois, para sistemas de grande porte, sua eficiência computacional é muito inferior ao método de Newton-Raphson.

O método é formulado em termos de variáveis complexas e não utiliza a divisão em subconjuntos descrita na seção anterior. Suponha inicialmente que todas as barras são do tipo PQ (carga) exceto, obviamente, a barra flutuante. Neste caso o algoritmo de Gauss-Seidel é derivado diretamente de (3.4) e dado por

$$\dot{V}_k^{i+1} = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k^{esp} - jQ_k^{esp}}{(\dot{V}_k^i)^*} - \sum_{m=1}^{k-1} \dot{V}_m^{i+1} Y_{km} - \sum_{m=k+1}^n \dot{V}_m^i Y_{km} \right]$$

$$k = 1, \dots, n; \quad k \neq \text{flutuante} \quad (3.20)$$

onde i é o contador de iterações. A verificação da convergência é realizada através do módulo da diferença entre as componentes dos vetores das tensões

⁶A norma infinita de um vetor é definida como

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

entre iterações, isto é, o processo iterativo termina quando

$$\|\dot{V}_k^{i+1} - \dot{V}_k^i\|_\infty \leq \varepsilon_v$$

onde ε_v é a precisão desejada no módulo das tensões.

O método de Gauss-Seidel pode, também, ser formulado em formato matricial como a seguir

$$\mathbf{I}(\dot{\mathbf{V}}) = \dot{\mathbf{Y}}\dot{\mathbf{V}} \quad (3.21)$$

onde \mathbf{I} é um vetor cujas componentes são dadas por

$$I_k(\dot{\mathbf{V}}) = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

A equação matricial (3.21) define um conjunto de equações *quase-lineares* apresentando uma *fraca não-linearidade diagonal* representada pela dependência dos valores das correntes injetadas nas barras da rede em relação à tensão dessas mesmas barras. Para um dado valor de $\dot{\mathbf{V}}$, por exemplo, o valor da iteração anterior, o sistema de equações (3.21) passa a ser um sistema linear o qual pode ser resolvido por qualquer um dos métodos descritos no Apêndice A. Em particular, pode-se utilizar um método de fatoração (LU, por exemplo) no qual trabalha-se com a inversa implícita de \mathbf{Y} , ou seja, \mathbf{Z} . Essa é a forma usual de se implementar um método de solução do fluxo de potência usando a matriz \mathbf{Z} .

Em uma barra PV os cálculos são um pouco diferentes desde que a injeção de potência reativa não é especificada e o módulo da tensão deve ser mantido em um valor constante V_k^{esp} . Devido a limitações no equipamento gerador de reativos, a injeção de reativos Q_k em uma barra PV deve ser mantida entre limites Q_k^{min} e Q_k^{max} .

Para simular essa situação, Q_k^{esp} é substituído em cada iteração por um valor calculado por

$$Q_k^{cal} = \Im \left\{ \dot{V}_k \sum_{m \in \Omega_k} \dot{V}_m^* \dot{Y}_{km}^* \right\} \quad (3.23)$$

Com este valor de Q_k^{cal} , a tensão \dot{V}_k^{i+1} é calculada usando-se (3.20). Como o módulo dessa tensão deve ser mantido igual a V_k^{esp} , as partes reais e imaginárias de \dot{V}_k^{i+1} são ajustadas para satisfazer essa condição mantendo-se, porém, o ângulo de fase calculado. Esse processo é representado pelas equações

$$\theta_k^{i+1} = \arctan \frac{f_k^{i+1}}{e_k^{i+1}} \quad (3.24)$$

$$\dot{V}_k^{i+1} = V_k^{esp} \cos \theta_k^{i+1} + j V_k^{esp} \sen \theta_k^{i+1} \quad (3.25)$$

onde f_k^{i+1} e e_k^{i+1} são, respectivamente, as partes real e imaginária da tensão na barra k calculadas na iteração i , antes do ajuste.

Para se levar em consideração os limites na injeção de reativos, é utilizada uma estratégia de mudança de tipo de barra: sempre que a injeção de reativos ultrapassar um dos limites, essa injeção é fixada em um valor igual ao limite violado e a barra passa a ser tratada como uma barra de carga. Essa estratégia é resumida a seguir

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } Q_k^{cal} > Q_k^{max} \implies Q_k^{cal} = Q_k^{max} \\ \text{Se } Q_k^{cal} < Q_k^{min} \implies Q_k^{cal} = Q_k^{min} \end{array} \right\} k \implies \{barra PQ\} \quad (3.26)$$

Se nas iterações seguintes Q_k retornar a um valor entre os limites, então a barra k volta a ser tratada como uma barra do tipo PV.

Exemplo 3.3 *Suponha que no sistema da Figura 3.2 as barras são dos seguintes tipos: barra 1 = Vθ, barra 2 = PV e barra 3 = PQ. Então, algoritmo de Gauss-Seidel é*

$$\dot{V}_2^{i+1} = \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2^{esp} - j(Q_2^{cal})^i}{(\dot{V}_2^i)^*} - \dot{V}_1 Y_{21} - \dot{V}_3^i Y_{23} \right]$$

$$\dot{V}_3^{i+1} = \frac{1}{Y_{33}} \left[\frac{P_3^{esp} - jQ_3^{esp}}{(\dot{V}_3^i)^*} - \dot{V}_1 Y_{31} - \dot{V}_2^{i+1} Y_{32} \right]$$

$$(Q_2^{cal})^{i+1} = \Im \left\{ \dot{V}_2^{i+1} \left(\dot{V}_1 Y_{21} + \dot{V}_2^{i+1} Y_{22} + \dot{V}_3^{i+1} Y_{23} \right)^* \right\}$$

onde i é o contador de iterações e \dot{V}_1 , P_2^{esp} , P_3^{esp} , Q_3^{esp} e V_2^{esp} são dados.

3.4.3 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson, para o cálculo das raízes de uma equação algébrica não-linear, baseia-se em linearizações sucessivas da função a partir de uma condição inicial arbitrária. Suponha a equação

$$f(x) = 0 \quad (3.27)$$

A expansão pela série de Taylor, e posterior eliminação dos termos de ordem maior ou igual a dois, produz

$$f(x) \approx f(x^0) + f'(x^0)[x - x^0] \quad (3.28)$$

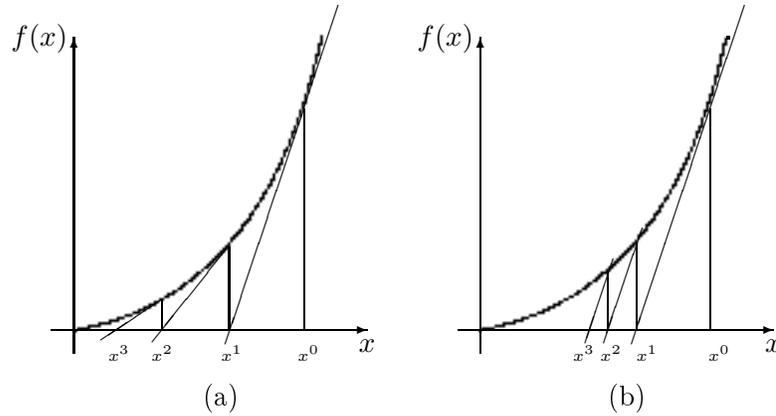


Figura 3.4: Solução de equação não-linear pelo método de Newton-Raphson

de onde se obtem

$$x = x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} \tag{3.29}$$

O valor de x calculado por (3.29) é uma aproximação da solução de (3.27) a qual pode ser melhorada promovendo-se nova linearização de $f(x)$ em torno desse novo valor e assim por diante. O processo iterativo pode ser sintetizado na expressão

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)} \quad i = 0, 1, \dots \tag{3.30}$$

A figura 3.4 (a) ilustra este processo graficamente. Na figura 3.4 (b) é mostrado que o processo pode convergir mesmo que $f'(x^i)$ seja mantida igual a $f'(x^0)$. Esse valor pode até ser diferente de $f'(x^0)$ desde que convenientemente escolhido.

O caso n-dimensional pode ser obtido como uma extensão do anterior. Suponha a equação

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{3.31}$$

onde

$$\mathbf{f}(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) & f_2(\cdot) & \cdots & f_n(\cdot) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$$

A expansão em série de Taylor dessas funções produz

$$f_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x}_1^0 + \cdots + \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x}_n^0 = 0$$

$$f_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x}_1^0 + \cdots + \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x}_n^0 = 0 \tag{3.32}$$

.....

$$f_n(\mathbf{x}) = f_n(\mathbf{x}^0) + \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x}_1^0 + \cdots + \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \Delta \mathbf{x}_n^0 = 0$$

ou em forma compacta

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^0)\Delta\mathbf{x}^0 = 0 \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{J}(\mathbf{x}^0)$ é a matriz Jacobiana⁷ associada ao sistema (3.31) calculada no ponto \mathbf{x}^0 .

O processo iterativo no caso n-dimensional é dado, então, por

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta\mathbf{x}^i \quad (3.34)$$

$$\Delta\mathbf{x}^i = -[\mathbf{J}(\mathbf{x}^i)]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^i) \quad (3.35)$$

O processo iterativo termina quando $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)\|_\infty \leq \varepsilon$, onde ε é um valor que determina a tolerância aceitável no erro cometido na solução.

É possível demonstrar [15] que o método de Newton-Raphson apresenta uma taxa de convergência quadrática, isto é, a norma do vetor de resíduos $\mathbf{f}(\mathbf{x}^i)$ diminui com o quadrado do número de iterações. Isto significa que o método converge rapidamente para a solução. Entretanto, essa convergência é fortemente dependente das condições iniciais (x^0). Caso a condição inicial não esteja contida em uma região próxima da solução procurada (*região de atração*), o processo iterativo poderá convergir para outra solução ou não convergir.

Aplicação ao Fluxo de Potência em Coordenadas Polares

Neste caso, o sistema de equações a ser resolvido, extraído de (3.14) e (3.15), é dado por

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - g_{p_k}(\Theta, \mathbf{V}) = 0, \quad k \in \Omega_{PQ} \cup \Omega_{PV} \quad (3.36)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - g_{q_k}(\Theta, \mathbf{V}) = 0, \quad k \in \Omega_{PQ} \quad (3.37)$$

O algoritmo iterativo é dado por

$$\begin{bmatrix} \Theta^{i+1} \\ \mathbf{V}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta^i \\ \mathbf{V}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\Theta^i \\ \Delta\mathbf{V}^i \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}^i \\ \Delta\mathbf{Q}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^i & \mathbf{N}^i \\ \mathbf{M}^i & \mathbf{L}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Theta^i \\ \Delta\mathbf{V}^i \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

⁷A matriz Jacobiana, ou o Jacobiano, de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida como

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{P} e \mathbf{Q} são os vetores dos resíduos de potência ativa e reativa, respectivamente, e as submatrizes \mathbf{H}^i , \mathbf{N}^i , \mathbf{M}^i , e \mathbf{L}^i têm o seguinte significado

$$\mathbf{H}^i = \frac{\partial g_{p_k}(\Theta^i, \mathbf{V}^i)}{\partial \Theta} \quad \mathbf{N}^i = \frac{\partial g_{p_k}(\Theta^i, \mathbf{V}^i)}{\partial \mathbf{V}} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{M}^i = \frac{\partial g_{q_k}(\Theta^i, \mathbf{V}^i)}{\partial \Theta} \quad \mathbf{L}^i = \frac{\partial g_{q_k}(\Theta^i, \mathbf{V}^i)}{\partial \mathbf{V}} \quad (3.41)$$

As componentes de \mathbf{H} , \mathbf{N} , \mathbf{M} , e \mathbf{L} são dadas por

$$\begin{aligned} H_{km} &= \frac{\partial P_k}{\partial \theta_m} = V_k V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ H_{kk} &= \frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = -V_k^2 B_{kk} - V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ N_{km} &= \frac{\partial P_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ N_{kk} &= \frac{\partial P_k}{\partial V_k} = V_k G_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \quad (3.42) \\ M_{km} &= \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_m} = -V_k V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ M_{kk} &= \frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = -V_k^2 G_{kk} + V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \sin \theta_{km}) \\ L_{km} &= \frac{\partial Q_k}{\partial V_m} = V_k (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \\ L_{kk} &= \frac{\partial Q_k}{\partial V_k} = -V_k B_{kk} + \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \sin \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}) \end{aligned}$$

Os elementos H_{kk} , N_{kk} , M_{kk} e L_{kk} podem, ainda, ser colocados em função das injeções de potência ativa e reativa na barra k como a seguir

$$\begin{aligned} H_{kk} &= -Q_k - V_k^2 B_{kk} \\ N_{kk} &= (P_k + V_k^2 G_{kk})/V_k \\ M_{kk} &= P_k - V_k^2 G_{kk} \\ L_{kk} &= (Q_k - V_k^2 B_{kk})/V_k \end{aligned} \quad (3.43)$$

Em geral, os elementos de $\Delta \mathbf{V}$ são divididos pelo valor das respectivas tensões para produzir termos similares em \mathbf{M} e \mathbf{L} . Neste caso (3.39) assume a forma⁸

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}^i \\ \Delta \mathbf{Q}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^i & (\mathbf{N}')^i \\ \mathbf{M}^i & (\mathbf{L}')^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Theta^i \\ \Delta \mathbf{V}^i / \mathbf{V}^i \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

onde os elementos de \mathbf{N}' e \mathbf{L}' são iguais aos de \mathbf{N} e \mathbf{L} multiplicados pelo módulo das respectivas tensões.

O método de Newton-Raphson em coordenadas polares pode ser sintetizado no algoritmo⁹ da Figura 3.5. Nesse algoritmo, os limites de geração de potência reativa em barras PV são tratados pela troca do tipo de barra (PV \Leftrightarrow PQ) sempre que um dos limites for ultrapassado, de maneira similar ao procedimento adotado no método de Gauss-Seidel. Neste caso, entretanto, essa modificação implica na alteração da estrutura dos Subsistemas de equações 1 e 2, ou seja, na inclusão ou exclusão de equações relativas à correção do módulo da tensão e ao resíduo de potência reativa na barra em questão nos sistemas de equações definidas em (3.38) e (3.39).

```

Inicialize os vetores  $\Theta$  e  $\mathbf{V}$ 
Faça_enquanto  $\|\Delta \mathbf{P}\|_\infty > \varepsilon_p$  e  $\|\Delta \mathbf{Q}\|_\infty > \varepsilon_q$ 
  Calcule  $\Delta \mathbf{P}$  e  $\Delta \mathbf{Q}$ 
  Calcule o Jacobiano definido em (3.39)
  Fatore o Jacobiano
  Resolva (3.39) obtendo  $\Delta \Theta$  e  $\Delta \mathbf{V}$ 
  Atualize o valor das tensões através de
     $\Theta \leftarrow \Theta + \Delta \Theta$ 
     $\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}$ 
  Implemente ajustes e controles
Fim Faça_enquanto
  
```

Figura 3.5: Algoritmo de Newton-Raphson para solução do fluxo de potência

Aplicação ao Fluxo de Potência em Coordenadas Retangulares

A versão do algoritmo de Newton-Raphson representando as tensões em coordenadas retangulares é menos usada que aquela em coordenadas polares

⁸Na equação (3.44) é utilizada a notação $\Delta \mathbf{V} / \mathbf{V}$ para significar a divisão de cada componente de $\Delta \mathbf{V}$ pelas respectivas componentes de \mathbf{V} . Essa notação não é correta, de um ponto de vista estritamente matemático, porém é usual na literatura sobre fluxo de potência.

⁹Técnicas de fatoração de matrizes usadas na solução de sistemas de equações lineares, assim como métodos de implementação de ajustes e controles referidas nesse algoritmo, serão introduzidas em seções seguintes destas notas de aula.

por incluir um número maior de equações e por ser ligeiramente menos confiável. Neste caso o sistema de equações a ser resolvido, extraído de (3.12) e (3.13), é dado por

$$\Delta P_k = P_k^{esp} - g'_{p_k}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0, \quad k \in \Omega_{PQ} \cup \Omega_{PV} \quad (3.45)$$

$$\Delta Q_k = Q_k^{esp} - g'_{q_k}(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0, \quad k \in \Omega_{PQ} \quad (3.46)$$

$$\Delta V_k = V_k^{esp} - (e_k + f_k)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad k \in \Omega_{PV} \quad (3.47)$$

O algoritmo iterativo é dado por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{i+1} \\ \mathbf{f}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^i \\ \mathbf{f}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}^i \\ \Delta \mathbf{f}^i \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}^i \\ \Delta \mathbf{Q}^i \\ \Delta \mathbf{V}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{e}^i \\ \Delta \mathbf{f}^i \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Nas equações acima, os vetores \mathbf{e} , \mathbf{f} , \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{V} têm as componentes com os índices definidos como em (3.45) a (3.47).

Exemplo 3.4 Para o sistema da Figura 3.3, o sistema de equações lineares a ser resolvido em cada iteração do método Newton-Raphson em coordenadas polares é

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta P_4 \\ \Delta Q_4 \\ \Delta P_5 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{22} & H_{23} & N'_{23} & & & H_{25} & N'_{25} \\ H_{32} & H_{33} & N'_{33} & H_{34} & N'_{34} & & \\ M_{32} & M_{33} & L'_{33} & M_{34} & L'_{34} & & \\ \hline & H_{43} & N'_{43} & H_{44} & N'_{44} & H_{45} & N'_{45} \\ & M_{43} & L'_{43} & M_{44} & L'_{44} & M_{45} & L'_{45} \\ \hline H_{52} & & & H_{54} & N'_{54} & H_{55} & N'_{55} \\ M_{52} & & & M_{54} & L'_{54} & M_{55} & L'_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_3 \\ \Delta V_3/V_3 \\ \Delta \theta_4 \\ \Delta V_4/V_4 \\ \Delta \theta_5 \\ \Delta V_5/V_5 \end{bmatrix}$$

O agrupamento dos elementos de H , N , M e L em blocos facilita a construção e fatoração do Jacobiano.

3.4.4 Método Desacoplado Rápido

O método de solução do problema de fluxo de potência conhecido como Desacoplado Rápido, desenvolvido por Stott e Alsac [23], é derivado do método de Newton-Raphson pela introdução de duas aproximações:

- Adoção de Jacobiano constante durante o processo iterativo;
- Desacoplamento das equações dos fluxos de potência ativa e reativa desprezando-se as submatrizes N e M da formulação polar.

Ambos artifícios já haviam sido utilizados anteriormente por outros pesquisadores na tentativa de tornar mais eficiente o algoritmo de Newton-Raphson, sem grande sucesso. Neste caso, porém, obteve-se um método extremamente eficiente devido a uma série de simplificações adicionais introduzidas pelos autores as quais refletem características físicas das redes elétricas.

Suponha a formulação básica do algoritmo de Newton-Raphson dada por (3.44). Devido à fraca interação existente entre as injeções de potência ativa e os módulos das tensões e entre as injeções de potência reativa e os ângulos de fase das tensões, os elementos de \mathbf{M} e \mathbf{N} são muito menores que os de \mathbf{H} e \mathbf{L}^{10} . Essas submatrizes podem, então, ser desprezadas resultando em dois sistemas independentes de equações dados por

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{H} \Delta \Theta \quad (3.50)$$

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{L}' \Delta \mathbf{V}$$

Estas equações podem, ainda, ser mais simplificadas se for levado em consideração o fato de que, particularmente em sistemas de transmissão em EAT e UAT¹¹, as relações abaixo são validas

$$\cos \theta_{km} \simeq 1.0$$

$$G_{km} \text{ sen } \theta_{km} \ll B_{km} \quad (3.51)$$

$$Q_k \ll B_{kk} V_k^2$$

As duas primeiras relações em (3.51) são justificadas pelo fato da relação B_{km}/G_{km} ser elevada em linhas de transmissão em EAT e UAT. Essa relação é geralmente maior que 5 para linhas de 230 kV e pode atingir valores da ordem de 20 para linhas de 500 kV. A terceira relação é justificada pelo fato das reatâncias *shunt* (cargas, reatores, capacitores, *shunt* das linhas, etc.) serem, em geral, muito maiores que a reatância série de linhas e transformadores.

Introduzindo as aproximações sugeridas por (3.51) nas expressões de \mathbf{H} e \mathbf{L}' , obtém-se

$$H_{kk} = L'_{kk} = -V_k^2 B_{kk} \quad (3.52)$$

$$H_{km} = L'_{km} = -V_k V_m B_{km}$$

¹⁰O fraco acoplamento entre as variações nos ângulos de fase das tensões e o fluxo de potência reativa, assim como entre o módulo das tensões e o fluxo de potência reativa, é uma característica física dos sistemas de potência utilizada correntemente na operação desses sistemas e refletido no modelo matemático do problema de fluxo de potência pelos valores relativos dos elementos das submatrizes do Jacobiano.

¹¹EAT: Extra Alta Tensão; UAT: Ultra Alta Tensão.

As expressões linearizadas e desacopladas de Resíduos de Potência são dadas, então, por

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V_1^2 B_{11} & V_1 V_2 B_{12} & \dots & V_1 V_n B_{1n} \\ V_1 V_2 B_{12} & V_2^2 B_{22} & \dots & V_2 V_n B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1 V_n B_{1n} & V_2 V_n B_{2n} & \dots & V_n^2 B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \dots \\ \Delta \theta_n \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \dots \\ \Delta Q_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V_1^2 B_{11} & V_1 V_2 B_{12} & \dots & V_1 V_n B_{1n} \\ V_1 V_2 B_{12} & V_2^2 B_{22} & \dots & V_2 V_n B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1 V_n B_{1n} & V_2 V_n B_{2n} & \dots & V_n^2 B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1/V_1 \\ \Delta V_2/V_2 \\ \dots \\ \Delta V_n/V_n \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1/V_1 \\ \Delta P_2/V_2 \\ \dots \\ \Delta P_n/V_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V_1 B_{11} & V_2 B_{12} & \dots & V_n B_{1n} \\ V_1 B_{12} & V_2 B_{22} & \dots & V_n B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_1 B_{1n} & V_2 B_{2n} & \dots & V_n B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \dots \\ \Delta \theta_n \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1/V_1 \\ \Delta Q_2/V_2 \\ \dots \\ \Delta Q_n/V_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \dots \\ \Delta V_n \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Como o módulo das tensões nodais têm pouca influência no fluxo de potência ativa, não se comete grande erro aproximando-se o valor das tensões nos elementos da matriz do sistema de equações (3.55) por 1,0 pu. Neste caso obtém-se

$$\Delta \mathbf{P}/\mathbf{V} = \mathbf{B}' \Delta \Theta \quad (3.57)$$

$$\Delta \mathbf{Q}/\mathbf{V} = \mathbf{B}'' \Delta \mathbf{V} \quad (3.58)$$

onde \mathbf{B}' e \mathbf{B}'' diferem apenas com relação às equações das barras de tensão controlada. Os elementos dessas matrizes são as componentes imaginárias dos elementos correspondentes de \mathbf{Y} . Alguma melhora no desempenho do método é obtida desprezando-se a resistência de linhas e transformadores no cálculo dos elementos de \mathbf{B}' . Neste caso, os elementos de \mathbf{B}' e \mathbf{B}'' seriam dados por

$$B'_{km} = -1/x_{km} \quad B'_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} 1/x_{km} \quad (3.59)$$

$$B''_{km} = -B_{km} \quad B''_{kk} = -B_{kk}$$

Aproximações adicionais que melhoram o desempenho do método podem ser introduzidas excluindo-se da representação de \mathbf{B}' e \mathbf{B}'' os elementos

da rede que afetam primordialmente os fluxos de potência ativa e reativa, respectivamente. Assim, no cálculo de \mathbf{B}' não são incluídos susceptâncias *shunt* e transformadores defasadores.

As matrizes \mathbf{B}' e \mathbf{B}'' são reais, simétricas (com excessão de \mathbf{B}' no caso de incluir transformadores defasadores) e dependem apenas dos parâmetros da rede. Portanto, devem ser fatorados apenas uma vez no início do processo iterativo.

O método Desacoplado Rápido pode ser sintetizado no algoritmo da Figura 3.6. Nesse algoritmo, a solução dos sistemas de equações lineares desacoplados definidos em (3.57) e (3.58) é realizada de forma seqüencial iniciando-se pelo sistema de equações correspondente à parte ativa. A razão da escolha dessa ordem está relacionada à usualmente fraca não-linearidade associada às equações do fluxo de potência ativa. Dessa forma, na primeira atualização dos valores dos ângulos de fase das tensões já se tem uma boa aproximação da solução para essas variáveis e, portanto, pode-se calcular, na seqüência, um valor mais preciso dos resíduos de potência reativa.

Nesse algoritmo, a modificação da estrutura das equações definidas em (3.57) e (3.58), para representar uma eventual troca de tipo de barra originada por violação no limite de injeção de reativos, implica em uma nova fatoração da matriz \mathbf{B}'' . Esse procedimento exige um esforço computacional considerável. Em seções seguintes, serão apresentadas outras formas de garantir uma solução do problema sem a necessidade de refatoração.

```

Inicialize os vetores  $\Theta$  e  $\mathbf{V}$ 
Calcule  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B}''$ 
Fatore  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B}''$ 
Faça  $\kappa_p = 1$  e  $\kappa_q = 1$ 
Faça _enquanto  $\kappa_p = 1$  ou  $\kappa_q = 1$ 
  Calcule  $\Delta\mathbf{P}$ 
  Se  $\|\Delta\mathbf{P}\|_\infty < \varepsilon_p$  então  $\kappa_p = 0$ 
  Se  $\kappa_p = 0$  e  $\kappa_q = 0$  então PARE
  Resolva (3.57) obtendo  $\Delta\Theta$ 
  Atualize o valor dos ângulos:  $\Theta \leftarrow \Theta + \Delta\Theta$ 
  Calcule  $\Delta\mathbf{Q}$ 
  Se  $\|\Delta\mathbf{Q}\|_\infty < \varepsilon_q$  então  $\kappa_q = 0$ 
  Se  $\kappa_p = 0$  e  $\kappa_q = 0$  então PARE
  Resolva (3.58) obtendo  $\Delta\mathbf{V}$ 
  Atualize o valor dos módulos:  $\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}$ 
  Implemente ajustes e controles
Fim Faça _enquanto

```

Figura 3.6: Algoritmo do método Desacoplado Rápido

3.5 Controles e Limites na Solução do Fluxo de Potência

Os principais tipos de controles representados nos estudos de fluxo de potência são:

- Módulo da tensão por injeção de reativos (local ou remota);
- Módulo da tensão por ajuste de taps;
- Fluxo de potência ativa usando transformadores defasadores;
- Controle de intercâmbio entre áreas.

Os principais tipos de limites normalmente implementados nos programas de fluxo de potência são:

- Injeção de potência reativa em barras PV;
- Módulo da tensão em barras PQ;
- Posição de taps de transformadores;
- Fluxo de potência nos ramos da rede.

3.5.1 Métodos de Implementação

1. **Classificação do Tipo de Barra:** Os controles e limites são implementados pelo estabelecimento de tipos especiais de barras na formulação do problema de fluxo potência. Durante o processo iterativo de solução das equações pode ocorrer a mudança do tipo de barra para acomodar situações onde algumas variáveis atingem seus limites. Um exemplo típico já mencionado neste capítulo é o das barras de tensão controlada (barras PV).
2. **Ajustes Alternados:** Consiste na realização de ajustes nas variáveis de controle entre as iterações da solução do Subsistema I. A variável a ser controlada é mantida constante durante o cálculo de uma iteração e ajustando entre as iterações pela fórmula:

$$\Delta y^i = \alpha \Delta x^i = \alpha(x^{esp} - x^i) \quad (3.60)$$

onde

x : variável a ser controlada (dependente);

y : variável de controle (independente);

α : relação de sensibilidade entre x e y ;

x^{esp} : valor especificado para x .

3. **Inclusão de Variáveis e Equações:** Neste procedimento, variáveis e equações adicionais são incluídas nas equações do Subsistema I para representar a ação de dispositivos de controle e limitar o valor de alguns parâmetros.

Detalhes relativos à implementação de limites e controles nos algoritmos e solução do fluxo de potência podem se encontrados em A. Monticelli, *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Ed. Edgar Blücher, 1983, cap. 6

3.6 Cálculo de Perdas e Fluxos de Potência Ativa e Reativa

Após a convergência do processo iterativo de solução das equações e inequações modelando o problema de fluxo de potência, as perdas e os fluxos de potência ativa e reativa em todos os ramos da rede devem ser calculados. As perdas e os fluxos são funções das tensões nodais nos terminais dos elementos e dos parâmetros dos mesmos.

As seguir são apresentadas expressões gerais para o cálculo dos fluxos nos vários elementos da rede. Os fluxos de potência ativa e reativa em um elemento conectado entre as barras k e m são dados por

$$\begin{aligned} f_{km}^P &= (t_{km} V_k)^2 g_{km} - (t_{km} V_k) V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \phi_{km}) \\ &\quad - (t_{km} V_k) V_m b_{km} \sin(\theta_{km} + \phi_{km}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} f_{km}^Q &= -(t_{km} V_k)^2 (b_{km} + y_s) - (t_{km} V_k) V_m g_{km} \sin(\theta_{km} + \phi_{km}) \\ &\quad + (t_{km} V_k) V_m b_{km} \cos(\theta_{km} + \phi_{km}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

As expressões dadas em (3.61) e (3.62) podem ser particularizadas para os diversos elementos da rede como definido a seguir:

- Linhas de transmissão: $t_{km} = 1$ e $\phi_{km} = 0$;
- Transformadores com tap fixo: $t_{km} = 1$, $y_s = 0$ e $\phi_{km} = 0$;
- Transformadores com variação automática de tap sob carga (LTC's): $y_s = 0$ e $\phi_{km} = 0$;
- Transformadores defasadores: $t_{km} = 1$ e $y_s = 0$.

As perdas no elemento da rede podem ser calculadas somando-se os fluxos nos dois terminais da mesma. Para o caso de linhas de transmissão, as perdas

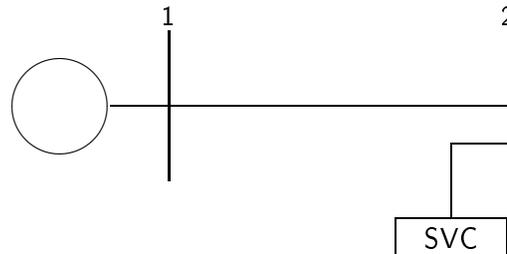
são dadas por:

$$\begin{aligned} L_{km}^P &= f_{km}^P + f_{mk}^P \\ &= g_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2 V_k V_m \cos \theta_{km}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} L_{km}^Q &= f_{km}^Q + f_{mk}^Q \\ &= -(b_{km} + y_s) (V_k^2 + V_m^2) + 2 V_k V_m b_{km} \cos \theta_{km} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Problemas

1. Estabeleça os dois subsistemas de equações utilizados na solução do fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson para o sistema da figura abaixo. Indique como seriam resolvidos esses subsistemas. Assuma conhecidos os parâmetros dos componentes que considere necessários.



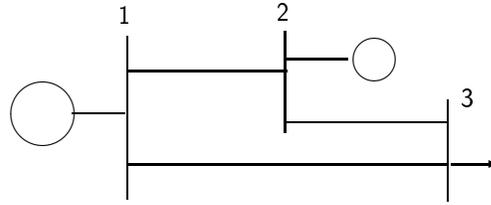
2. Para a rede da figura abaixo, considerando a barra 1 como barra flutuante, use os seguintes métodos para calcular duas iterações da solução do fluxo de potência
- Gauss-Seidel;
 - Newton-Raphson;
 - Desacoplado Rápido.

Dados Barras (pu)

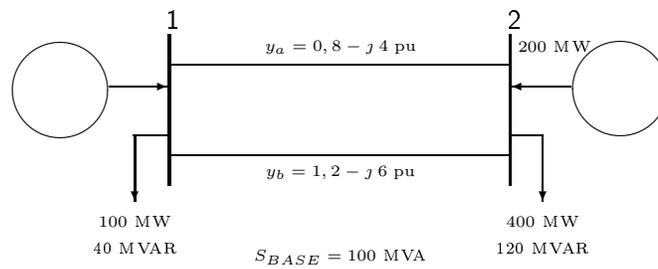
Barra	Geração		Carga		Limite Ger. Reat.	Tensão Esp.
1	-	-	0	0	-	1,0
2	3,0	-	0	0	5,0	1,1
3	0	0	4,5	0,5	-	-

Dados de Ramos (pu)

Barra de	para	Resistência	Reatância	Susceptância
1	2	0	0,1	0
2	3	0	0,2	0
1	3	0	0,1	0



3. No sistema abaixo, a tensão nos terminais dos geradores é mantida igual à tensão nominal (1,0 pu). Calcule a defasagem angular entre as tensões nas barras 1 e 2 usando o Método de Newton-Raphson para solução do problema de fluxo de potência.



Capítulo 4

Fluxo de Potência Linearizado

Os sistemas de energia elétrica, em condições normais de operação, apresentam um perfil de tensão plano, isto é, o módulo das tensões nos barramentos estão próximas de seu valor nominal (1.0 pu), o que faz com que o fluxo de potência reativa nas linhas e transformadores seja pequeno. Desta forma, o fluxo de potência nos ramos da rede é, praticamente, constituído apenas pelo fluxo de potência ativa. Além disso, as perdas no sistema de transmissão são relativamente pequenas. Por essas razões, é comum utilizar-se em várias aplicações a formulação linearizada do modelo de fluxo de potência (ou fluxo de potência DC¹). Nessa formulação, os módulos das tensões são considerados iguais a 1,0 pu e os transformadores com tap variável são considerados operando em sua posição nominal. As vantagens dessa formulação são a robustez e os baixos requisitos computacionais para sua solução.

4.1 Equações Básicas

O fluxo de potência ativa em uma linha de transmissão em corrente alternada, ou em um transformador com tap fixo, é dado pela seguinte expressão, como mostrado na seção 3.6:

$$f_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (4.1)$$

onde

$$g_{km} = \frac{r_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2}; \quad b_{km} = \frac{-x_{km}}{r_{km}^2 + x_{km}^2} \quad (4.2)$$

onde

¹A denominação DC decorre do fato das equações do modelo de fluxo de potência linearizado serem semelhantes às equações de um circuito em corrente contínua. Esse modelo não inclui a representação de linhas de transmissão em corrente contínua.

f_{km} : fluxo de potência ativa na linha conectada entre as barras k e m , saindo da barra k em direção à barra m ;

V_k : módulo da tensão na barra k ;

θ_{km} : defasagem angular entre as tensões das barras k e m ;

r_{km} : resistência série da linha;

x_{km} : reatância série da linha.

Desprezando-se as perdas ($r_{km} = 0$), e considerando

$$V_k = V_m \approx 1.0; \quad \text{sen}\theta_{km} \approx \theta_{km}; \quad b_{km} \approx -1/x_{km}; \quad (4.3)$$

o fluxo de potência na linha pode ser aproximado por

$$f_{km} = \frac{\theta_{km}}{x_{km}} = \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}} \quad (4.4)$$

onde θ_k e θ_m são os ângulos de fase das tensões nas barras k e m , respectivamente, em relação à tensão de uma das barras da rede tomada como referência.

No caso dos transformadores defasadores, o fluxo de potência ativa é dado por

$$f_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos(\theta_{km} + \phi_{km}) - V_k V_m b_{km} \text{sen}(\theta_{km} + \phi_{km}) \quad (4.5)$$

onde ϕ_{km} é a defasagem angular introduzida pelo transformador defasador.

Introduzindo-se as mesmas aproximações utilizadas no caso de linhas de transmissão, o fluxo de potência ativa no transformador é dado, aproximadamente, por

$$f_{km} = \frac{\theta_{km} + \phi_{km}}{x_{km}} \quad (4.6)$$

4.2 Formulação Matricial

Considerando inicialmente apenas linhas de transmissão e transformadores em fase, a injeção líquida de potência ativa em uma barra da rede é dada por

$$P_k = \sum_{m \in \Omega'_k} \frac{\theta_{km}}{x_{km}}, \quad k = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

onde

Ω'_k : conjunto das barras diretamente conectadas à barra k ;

n : número de barras da rede.

A equação (4.7) pode ser escrita como a seguir

$$P_k = \left(\sum_{m \in \Omega'_k} \frac{1}{x_{km}} \right) \theta_k + \sum_{m \in \Omega'_k} \left(-\frac{1}{x_{km}} \theta_m \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (4.8)$$

Desta forma, pode-se chegar à representação matricial

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\boldsymbol{\Theta}} \quad (4.9)$$

onde

$\bar{\mathbf{P}}$: vetor cujas componentes são as injeções líquidas de potência ativa em todas as barras da rede;

$\bar{\boldsymbol{\Theta}}$: vetor cujas componentes são os ângulos de fase das tensões em todas as barras da rede em relação à tensão da barra de referência;

$\bar{\mathbf{B}}$: matriz de dimensão $n \times n$ cujos elementos são dados por:

$$B_{km} = \frac{-1}{x_{km}}; \quad B_{kk} = \sum_{m \in \Omega'_k} \frac{1}{x_{km}}. \quad (4.10)$$

O sistema de equações lineares definido em (4.9) tem uma equação redundante devido ao fato da soma das injeções em todas as barras da rede ser nula (as perdas são desprezadas). Isto implica na singularidade de $\bar{\mathbf{B}}$. Por outro lado, os ângulos de fase são grandezas relativas as quais devem ser definidas em relação a uma referência fixa. Para resolver ambos os problemas, elimina-se uma das equações do sistema de equações e adota-se a tensão da barra correspondente como referência angular ($\theta_k = 0^0$). Desta forma chega-se ao sistema de $n - 1$ equações

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\boldsymbol{\Theta} \quad (4.11)$$

onde foi eliminada a equação correspondente à barra de referência.

No caso da rede conter transformadores defasadores, a representação é idêntica àquela mostrada em (4.11), exceto pelo vetor \mathbf{P} o qual tem suas componentes associadas aos nós terminais dos transformadores alteradas pela adição de parcelas correspondentes a geração e carga fictícias como mostrado na Figura 4.1 [20].

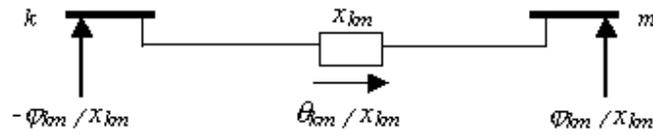


Figura 4.1: Modelo do transformador defasador

Exemplo 4.1 Seja o sistema com três barras da Figura 4.2, no qual as reatâncias dos ramos da rede são dados em pu na base de 100 MVA [?]. Os elementos do modelo de fluxo de potência linearizado são dados por:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ -0,8 \end{bmatrix}; \quad \bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 22,5 & -10,0 & -12,5 \\ -10,0 & 30,0 & -20,0 \\ -12,5 & -20,0 & 32,5 \end{bmatrix}$$

Para se obter a solução do fluxo de potência é necessário definir-se uma barra de referência. Suponha escolhida a barra 1 como referência. Neste caso temos $\theta_1 = 0^0$ e

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30,0 & -20,0 \\ -20,0 & 32,5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,4 \\ -0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0565 & 0,0348 \\ 0,0348 & 0,0522 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ -0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0052 \\ -0,0278 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} -0,2979^\circ \\ -1,5928^\circ \end{bmatrix}$$

O fluxo de potência nas linhas é dado por

$$f_{12} = \frac{0 - (0,0052)}{0,10} = 0,0520 \text{ pu} = 5,2 \text{ MW};$$

$$f_{13} = \frac{0 - (0,0278)}{0,08} = 0,3475 \text{ pu} = 34,8 \text{ MW};$$

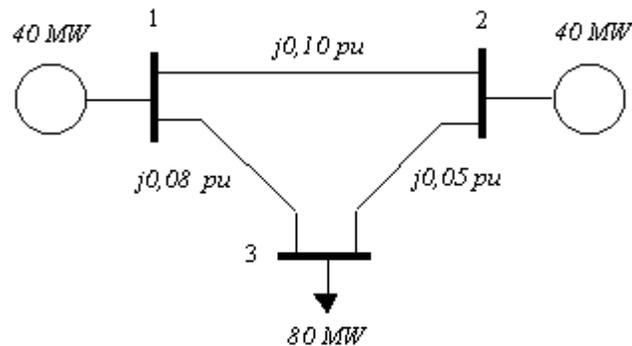


Figura 4.2: Sistema utilizado no exemplo 1

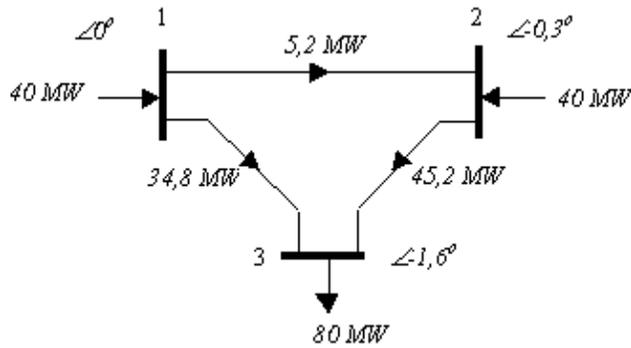


Figura 4.3: Resultados do exemplo 1

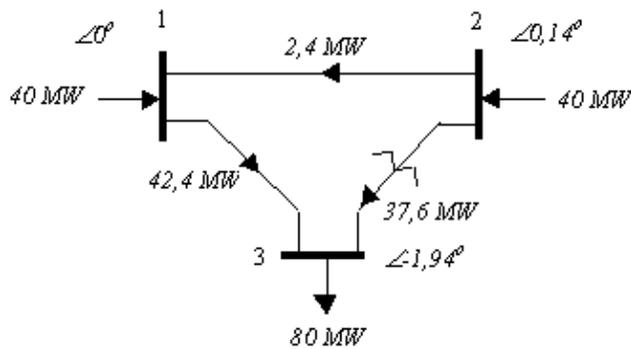


Figura 4.4: Resultados do exemplo 1 considerando um transformador defasador no ramo 2-3

$$f_{23} = \frac{-0,0052 - (-0,0278)}{0,05} = 0,4520 \text{ pu} = 45,2 \text{ MW}.$$

Os resultados do cálculo do fluxo de potência estão resumidos na Figura 4.3. Suponha, agora, que o ramo 2-3 é um transformador defasador o qual introduz um defasamento angular $\phi = -1^\circ$ ($-0,0174$ rad) no sentido de 2 para 3. A nova solução do fluxo de potência será dada por

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0565 & 0,0348 \\ 0,0348 & 0,0522 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 + 0,0174/0,05 \\ -0,8 - 0,0174/0,05 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,0024 \\ -0,0339 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} 0,1375^\circ \\ -1,9423^\circ \end{bmatrix}$$

o que produzirá a nova distribuição de fluxo na rede² mostrada na Figura 4.4.

²Observe que o fluxo no ramo contendo o transformador defasador é dado por $P_{23} = (0,0024 + 0,0339 - 0,0174)/0,05 \approx 37,6$.

4.3 Inclusão de Perdas no Modelo Linearizado

As perdas no sistema de transmissão representam parcela importante da energia disponibilizada em um sistema de energia elétrica. Sua inclusão em modelos de fluxo de potência é importante em vários estudos, particularmente naqueles envolvendo aspectos econômicos da operação desses sistemas. A representação das perdas ativas no modelo de fluxo de potência linearizado pode ser realizada de forma aproximada.

Como mostrado na seção 3.6, as perdas ativas em um ramo da rede, com admitância série dada por $y_{km} = g_{km} + jb_{km}$, são dadas por

$$L_{km} = g_{km}(V_k^2 + V_m^2 - 2V_kV_m\cos\theta_{km}) \quad (4.12)$$

Assumindo-se as seguintes aproximações

$$V_k = V_m \approx 1.0\text{pu}; \quad \cos\theta_{km} \approx 1 - \frac{\theta_{km}^2}{2}; \quad (4.13)$$

obtem-se

$$L_{km} = g_{km}\theta_{km}^2 \quad (4.14)$$

A inclusão das perdas no modelo de fluxo de potência linearizado pode ser realizado, aproximadamente, pela adição de cargas fictícias nas barras terminais das linhas correspondentes à metade das perdas das linhas conectadas entre as barras. Assim, o modelo dado na equação (4.11) passa a ter o seguinte aspecto

$$\mathbf{P} - \mathbf{L} = \mathbf{B}\Theta \quad (4.15)$$

onde \mathbf{L} é um vetor cujas componentes são dadas por

$$L_k = \sum_{m \in \Omega'_k} \frac{1}{2} g_{km} \theta_{km}^2 \quad (4.16)$$

A solução dos sistema de equações definido em (4.15) exige um processo iterativo pois os elementos de \mathbf{L} dependem do conhecimento do vetor de solução Θ . Entretanto, na maioria das aplicações, é suficiente adotar o seguinte procedimento [20]:

- Resolve-se o problema sem considerar as perdas (4.11);
- Utiliza-se esta solução para calcular os elementos de \mathbf{L} ;
- Resolve-se, então, o sistema na forma dada em (4.15).

Exemplo 4.2 Considere o sistema usado no Exemplo 4.1, acrescentando componentes resistivas às impedâncias das linhas de valores $r_{12} = 0,050 \text{ pu}$, $r_{13} = 0,040 \text{ pu}$ e $r_{23} = 0,025 \text{ pu}$, respectivamente.

As perdas associadas aos ramos da rede são dadas por

$$\begin{aligned} L_{12} &= 4,0 \times (0 + 0,0052)^2 = 10,82 \times 10^{-5} \\ L_{13} &= 5,0 \times (0 + 0,0278)^2 = 386,42 \times 10^{-5} \\ L_{23} &= 8,0 \times (-0,0052 + 0,0278)^2 = 408,61 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

A solução do sistema de equações, incluindo as perdas, é dada, então, por

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0565 & 0,0348 \\ 0,0348 & 0,0522 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 - 209,71 \times 10^{-5} \\ -0,8 - 397,51 \times 10^{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0055 \\ -0,0281 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} -0,31^\circ \\ -1,61^\circ \end{bmatrix}$$

o que produzirá a nova distribuição de fluxo na rede mostrada na Figura 4.5, na qual as setas pontilhadas indicam a carga adicional em cada barra correspondente às perdas nos ramos da rede conectados às mesmas.

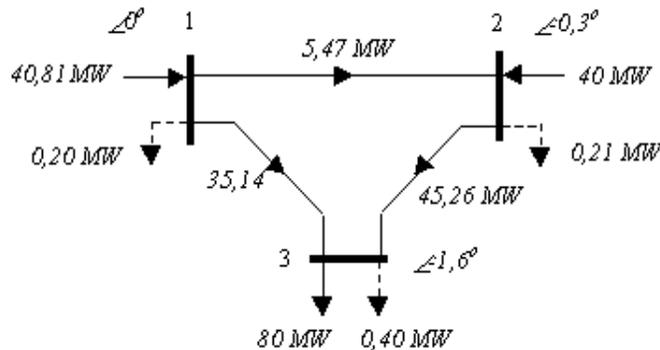


Figura 4.5: Resultados do Exemplo 4.1 considerando as perdas

4.4 Relação de Sensibilidade

A partir do modelo linearizado de fluxo de potência, é possível estabelecer relações de sensibilidade entre os fluxos de potência ativa nos ramos da rede e as injeções de potência ativa nas barras. Essas sensibilidades são úteis em vários estudos e modelos. O balanço de potência (1ª Lei de Kirchoff) estabelece que a soma algébrica das potências que entram e saem de uma barra deve ser nula, ou ainda, que

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{P} \quad (4.17)$$

onde

A: matriz incidência reduzida³ barra \times ramo, com dimensão $(n - 1) \times m$;

m : número de ramos da rede;

f: vetor cujos elementos são os fluxos de potência nas linhas ($m \times 1$).

Os fluxos de potência nas linhas podem ser expressos pela equação abaixo (2^a Lei de Kirchoff)

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Gamma}[\mathbf{A}]^T \mathbf{\Theta} \quad (4.18)$$

onde

$\mathbf{\Gamma}$: matriz diagonal cujos elementos são as susceptâncias dos ramos ($1/x_j$), com dimensão $m \times m$.

Substituindo (4.17) em (4.18), temos

$$\mathbf{A}\mathbf{\Gamma}[\mathbf{A}]^T \mathbf{\Theta} = \mathbf{P} \quad (4.19)$$

de onde se conclui, por comparação com (4.11), que

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}[\mathbf{A}]^T \quad (4.20)$$

De (4.18), obtem-se

$$\mathbf{f} = \mathbf{\Gamma}[\mathbf{A}]^T [\mathbf{B}]^{-1} \mathbf{P} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{f} = \beta \mathbf{P} \quad (4.22)$$

onde

$$\beta = \mathbf{\Gamma}[\mathbf{A}]^T [\mathbf{B}]^{-1} \quad (4.23)$$

A matriz β é a *Matriz de Sensibilidades* entre os fluxos nas linhas e as injeções nodais de potência. Seus elementos fornecem a relação entre variações de injeções em barras e fluxos de potência em ramos da rede. Na matriz β não existe a coluna correspondente à barra de referência. Esses fatores são assumidos iguais a zero pois, no modelo de fluxo de potência linearizado, qualquer variação na injeção de potência na barra de referência é absorvida pela própria barra de referência não implicando, portanto, em variação do fluxo de potência nos ramos da rede.

³A matriz incidência define a conexão dos ramos aos nós da rede. Possui elementos iguais a 1 e -1 na interseção da coluna genérica j (ramo) com as linhas k e m (nós terminais do ramo j), respectivamente. Os demais elementos da matriz são nulos. A matriz incidência reduzida é obtida pela eliminação da linha correspondente à barra de referência da matriz incidência.

Exemplo 4.3 Para o sistema usado no Exemplo 4.1, a matriz de sensibilidade β é dada por

$$\beta = \begin{bmatrix} 10,0 & & \\ & 12,5 & \\ & & 20,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0565 & 0,0348 \\ 0,0348 & 0,0522 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0,5652 & -0,3478 \\ -0,4348 & -0,6522 \\ 0,4348 & -0,3478 \end{bmatrix}$$

Os elementos de β podem ser utilizados para calcular variações nos fluxos devido a variações nas injeções. Por exemplo, suponha que a carga na barra 3 sofre um acréscimo de 10% passando ao valor 88 MW. O novo valor do fluxo na linha 1-3 é dado por

$$\begin{aligned} f_{13}^{novo} &= f_{13}^{velho} + (-0,08) \times (-0,6522) = \\ &= 0,3475 + 0,0522 = 0,3997 \approx 40\text{MW} \end{aligned}$$

4.5 Análise de Alterações no Modelo Linearizado

Em várias aplicações práticas, tais como análise de contingências, avaliação da confiabilidade, etc., são necessárias soluções de seqüências de sistemas de equações do modelo de fluxo de potência linearizado (4.11) correspondentes à simulação de alterações na condição de carga e geração ou na rede de transmissão. Esses sistemas de equações apresentam pequenas diferenças entre si o que permite obter a solução dos mesmos com esforço computacional reduzido. As seguir são apresentados procedimentos para a obtenção dessas soluções a partir da solução do caso base, ou seja, da rede em sua configuração normal.

4.5.1 Alterações na condição de carga-geração

Suponha uma variação no vetor de injeções de potência ativa a qual passaria de uma condição inicial \mathbf{P} para $\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$. Isto acarreta uma variação nos ângulos de fase do valor Θ para $\Theta + \Delta\Theta$. Supondo que não exista alteração na rede, esta variação é dada por

$$\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P} = \mathbf{B}(\Theta + \Delta\Theta) \quad (4.24)$$

de onde se conclui que

$$\boxed{\Delta\Theta = \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{P}} \quad (4.25)$$

Como pode-se observar de 4.25, o cálculo de $\Delta\Theta$ exige pouco esforço computacional adicional pois \mathbf{B}^{-1} já está disponível, de forma explícita ou implícita (fatores), desde a solução do caso base.

4.5.2 Alterações na rede

O problema agora consiste em calcular as alterações nos ângulos de fase da tensões $\Delta\Theta$ causadas por alterações no valor das reatâncias dos ramos, ou de forma equivalente, nos elementos de \mathbf{B} a qual assume o valor $\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}$. Uma hipótese usual nesta análise é supor que não há alteração nas injeções líquidas de potência. O novo valor de $\Delta\Theta$ pode ser calculado resolvendo-se a equação

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})(\Theta + \Delta\Theta) \quad (4.26)$$

a qual pode ser reescrita como

$$\mathbf{B}\Delta\Theta + \Delta\mathbf{B}\Theta + \Delta\mathbf{B}\Delta\Theta = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

A equação acima pode ser resolvida de forma aproximada ou exata como se mostra nas seções seguintes.

Em (4.27), a alteração em \mathbf{B} pode ser representada por

$$\Delta\mathbf{B} = \Delta b_{km} \mathbf{e}_{km} \mathbf{e}_{km}^T \quad (4.28)$$

onde

$$\mathbf{e}_{km}^T = [0 \ \cdots \ 0 \ \overset{k}{1} \ 0 \ \cdots \ 0 \ \overset{m}{-1} \ 0 \ \cdots \ 0]$$

e Δb_{km} é a variação na susceptância do ramo k - m .

Solução aproximada

É obtida desprezando-se o termo $\Delta\mathbf{B}\Delta\Theta$ em (4.27). Neste caso, a solução é dada por

$$\Delta\Theta = \mathbf{B}^{-1} \Delta\mathbf{B} \Theta \quad (4.29)$$

Introduzindo (4.28), a solução passa a ser dada por

$$\Delta\Theta = -\Delta b_{km} \mathbf{X} \mathbf{e}_{km} \mathbf{e}_{km}^T \Theta \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}$. Finalmente, a expressão acima pode ser colocada na forma

$$\boxed{\Delta\Theta = -\Delta b_{km} \mathbf{X}_{km} \theta_{km}} \quad (4.31)$$

onde \mathbf{X}_{km} é a diferença entre a k -ésima e a m -ésima colunas de \mathbf{X} e θ_{km} é a defasagem angular no ramo k - m antes da alteração na rede.

Solução exata

De (4.27), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta\Theta &= -\mathbf{B}^{-1}\Delta B(\Theta + \Delta\Theta) \\
\Delta\Theta &= -\mathbf{B}^{-1}\Delta b_{km}\mathbf{e}_{km}\mathbf{e}_{km}^T(\Theta + \Delta\Theta) \\
\Delta\Theta &= -\Delta b_{km}(\Theta_{km} + \Delta\Theta_{km})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_{km} \\
\Delta\Theta &= -\Delta b_{km}(\Theta_{km} + \Delta\Theta_{km})\mathbf{X}_{km}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Na expressão acima $\Delta\Theta$ é dado em função de $\Delta\Theta_{km}$, isto é, duas de suas componentes. Para se obter o valor de $\Delta\Theta_{km}$, pré-multiplica-se a expressão por \mathbf{e}_{km}^T obtendo-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{km}^T\Delta\Theta &= \Delta\Theta_{km} = -\Delta b_{km}(\Theta_{km} + \Delta\Theta_{km})\mathbf{e}_{km}^T\mathbf{X}_{km} \\
\Delta\Theta_{km}(1 + \Delta b_{km}\alpha) &= -\Delta b_{km}\Theta_{km}\alpha, \quad \alpha = \mathbf{e}_{km}^T\mathbf{X}_{km} \\
\Delta\Theta_{km} &= -\frac{\Delta b_{km}\Theta_{km}\alpha}{1 + \Delta b_{km}\alpha}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Substituindo (4.32) em (4.33), temos

$$\begin{aligned}
\Delta\Theta &= -\Delta b_{km}\left[\Theta_{km} - \frac{\Delta b_{km}\Theta_{km}\alpha}{1 + \Delta b_{km}\alpha}\right]\mathbf{X}_{km} \\
\Delta\Theta &= -\Delta b_{km}\left[\Theta_{km} - \frac{\Theta_{km} + \Delta b_{km}\Theta_{km}\alpha - \Delta b_{km}\Theta_{km}\alpha}{1 + \Delta b_{km}\alpha}\right]\mathbf{X}_{km} \\
\Delta\Theta &= -\Delta b_{km}\frac{\Theta_{km}}{1 + \Delta b_{km}\alpha}\mathbf{X}_{km}
\end{aligned}$$

De onde, finalmente, conclui-se

$$\boxed{\Delta\Theta = -c\mathbf{X}_{km}\Theta_{km}} \tag{4.34}$$

onde

$$\boxed{c = \frac{1}{\frac{1}{\Delta b_{km}} + \mathbf{e}_{km}^T\mathbf{X}_{km}}} \tag{4.35}$$

4.6 Método dos Fatores de Distribuição

O método dos fatores de distribuição utiliza o modelo de fluxo de potência linearizado descrito nas seções anteriores. Esses fatores representam relações de sensibilidade entre variáveis da rede e são usados em diversas aplicações. Em particular, são utilizados na Análise Estática de Contingências, na formulação linearizado do Fluxo de Potência Ótimo e na avaliação da Capacidade de Transmissão Disponível entre áreas da rede. A seguir são apresentados os fatores de distribuição mais utilizados na prática.

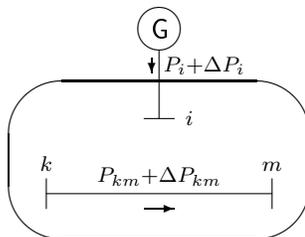


Figura 4.6: Fator de deslocamento de geração

4.6.1 Fator de Distribuição para Deslocamento de Geração

Este fator relaciona variações no fluxo de uma ramo da rede devido à variação da injeção de potência ativa em uma das barras da rede. Esta situação é ilustrada na Figura 4.6. O fator de distribuição para deslocamento de geração é definido por

$$\boxed{\phi_{km,i}^G = \frac{\Delta f_{km}}{\Delta P_i}} \quad (4.36)$$

onde Δf_{km} é a variação no fluxo de potência ativa em um ramo k - m devido à variação ΔP_i na injeção de uma barra genérica i .

Inicialmente, vamos considerar que a variação na injeção de uma barra qualquer é compensada por uma variação igual e de sentido contrário na injeção na barra de referência. Supondo a variação na barra i , temos⁴

$$\begin{aligned} \Delta \theta_k &= X_{ki} \Delta P_i \\ \Delta \theta_m &= X_{mi} \Delta P_i \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{km} &= (X_{ki} - X_{mi}) \Delta P_i \\ \Delta f_{km} &= \frac{\Delta \theta_{km}}{x_{km}} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\boxed{\phi_{km,i}^G = \frac{X_{ki} - X_{mi}}{x_{km}}} \quad (4.37)$$

Caso se deseje relaxar a hipótese de compensação da variação da injeção na barra i pela variação na injeção da barra flutuante, deve-se dispor de uma regra de distribuição dessa variação pelas demais barras da rede definida por *fatores de absorção* γ_{ji} da variação da injeção na barra i pelos demais

⁴Nas equações seguintes, o símbolo X_{km} representa o elemento km da matriz \mathbf{X} . Não deve ser confundido com o símbolo \mathbf{X}_{km} , usado anteriormente, o qual denota a diferença entre as colunas k e m da mesma matriz \mathbf{X} .

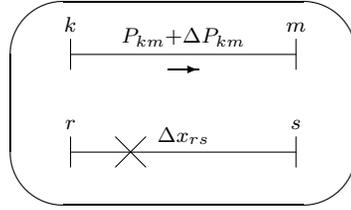


Figura 4.7: Fator de distribuição para desligamento de ramo

geradores do sistema. Neste caso, a variação do fluxo em um ramo k - m da rede, devido à variação da injeção ΔP_i na barra i será dado por

$$\Delta f_{km} = \sum_{j \in \Omega_G} \phi_{km,i}^G \gamma_{ji} \Delta P_i \quad (4.38)$$

onde Ω_G é o conjunto de geradores da rede.

Os fatores de distribuição para deslocamento de geração definidos nesta seção são iguais aos elementos da matriz de sensibilidade β definida na seção 4.4.

4.6.2 Fator de Distribuição para Desligamento de Ramo

Este fator relaciona variações no fluxo de um ramo da rede devido à variação na reatância de um outro ramo da rede causado, por exemplo, pelo desligamento de um dos circuitos em paralelo que forma esse ramo. Esta situação é ilustrada na Figura 4.7.

O fator de distribuição para desligamento de ramo é definido por

$$\phi_{km,rs}^D = \frac{\Delta f_{km}}{f_{rs}} \quad (4.39)$$

onde Δf_{km} é a variação no fluxo de potência ativa em um ramo k - m devido à variação Δx_{rs} na reatância do ramo rs , no qual havia um fluxo de potência ativa f_{rs} antes desta variação na reatância.

De (4.5.2) e (4.35) vem

$$\Delta\Theta = -\frac{1}{\Delta x_{rs} + [X_{rr} - X_{rs} - X_{sr} + X_{ss}]} \begin{bmatrix} X_{1r} - X_{1s} \\ \vdots \\ X_{kr} - X_{ks} \\ \vdots \\ X_{mr} - X_{ms} \\ \vdots \\ X_{rr} - X_{rs} \\ \vdots \\ X_{sr} - X_{ss} \\ \vdots \\ X_{nr} - X_{ns} \end{bmatrix} \theta_{rs}$$

e

$$\Delta\theta_{km} = -\frac{1}{\Delta x_{rs} + [X_{rr} - X_{rs} - X_{sr} + X_{ss}]} [X_{kr} - X_{ks} - X_{mr} + X_{ms}] \theta_{rs}$$

O fator de distribuição é calculado usando

$$\phi_{km,rs}^D = \frac{\Delta f_{km}}{f_{rs}} = \frac{\Delta\theta_{km}/x_{km}}{\theta_{rs}/x_{rs}}$$

de onde, finalmente, obtemos

$$\boxed{\phi_{km,rs}^D = -\frac{x_{rs}[X_{kr} - X_{ks} - X_{mr} + X_{ms}]}{x_{km}[\Delta x_{rs} + X_{rr} - X_{rs} - X_{sr} + X_{ss}]}} \quad (4.40)$$

4.6.3 Fator de Distribuição Combinado de Deslocamento de Geração e Desligamento de Ramo

Este fator de distribuição, ilustrado na figura 4.8, indica a influência da variação da geração em uma barra i no fluxo de potência de um ramo $k-m$ da rede quando já havia uma alteração na reatância de outro ramo $r-s$. O fator é definido como

$$\boxed{\phi_{km,i(rs)}^{GD} = \frac{\Delta f_{km}}{\Delta f_i}} \quad (4.41)$$

e pode ser calculado por

$$\boxed{\phi_{km,i(rs)}^{GD} = \phi_{km,i}^G + \phi_{km,rs}^D \phi_{rs,i}^G} \quad (4.42)$$

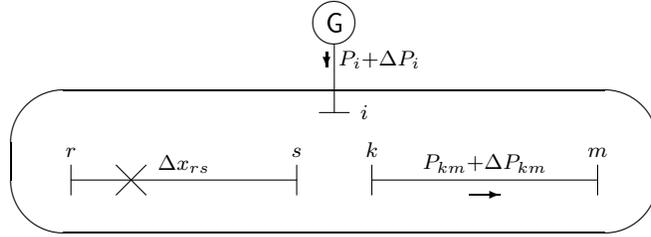


Figura 4.8: Fator de distribuição combinado para deslocamento de geração e desligamento de ramo

4.6.4 Fator de Distribuição Combinado de Desligamento de Dois Ramos

Este fator de distribuição, ilustrado na figura 4.9, indica a influência da variação da reatância de um ramo $r-s$ da rede no fluxo de um ramo $k-m$, quando já havia uma alteração na reatância de outro ramo $t-u$. O fator é

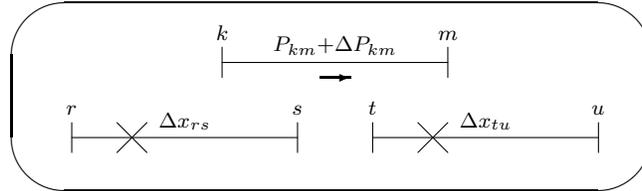


Figura 4.9: Fator de distribuição combinado de desligamento de dois ramos definido como

$$\phi_{km,rs(tu)}^{DD} = \frac{\Delta f_{km}}{f_{rs}} \quad (4.43)$$

e pode ser calculado por

$$\phi_{km,rs(tu)}^{DD} = \frac{\phi_{km,rs}^D + \phi_{km,tu}^D \phi_{tu,rs}^D}{1 - \phi_{rs,tu}^D \phi_{tu,rs}^D} \quad (4.44)$$

4.6.5 Fator de Distribuição para Transferência de Potência

Este fator relaciona a variação no fluxo de potência ativa de um ramo rs da rede devido a uma nova *transação*⁵ estabelecida entre os nós k e m [8]. Esta situação é ilustrada na Figura 4.10.

⁵Uma transação é um valor especificado de potência a ser injetado (gerado) em um determinado nó da rede e retirado (consumido) em outro nó da rede. Esse tipo de análise é importante na operação de sistemas elétricos em ambiente competitivo para verificação da viabilidade técnica de uma transação de compra e venda de energia.

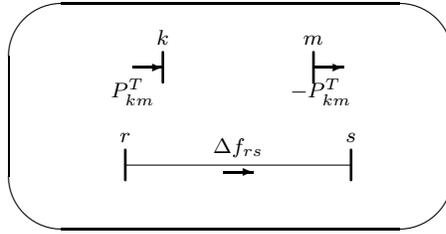


Figura 4.10: Fator de distribuição para transferência de potência

O fator de distribuição para transferência de potência é definido por

$$\boxed{\phi_{km,rs}^T = \frac{\Delta f_{rs}}{P_{km}^T}} \quad (4.45)$$

onde Δf_{rs} é a variação no fluxo de potência ativa em um ramo rs devido à transação P_{km}^T entre os nós k e m .

O fator pode ser obtido pela superposição dos efeitos das injeções de potência nas barras k e m , valendo-se das expressões já deduzidas para os fatores de deslocamento de geração, como a seguir

$$\begin{aligned} \Delta f_{rs} &= \phi_{k,rs}^G P_{km}^T + \phi_{m,rs}^G (-P_{km}^T) \\ &= (\phi_{k,rs}^G - \phi_{m,rs}^G) P_{km}^T \\ &= \phi_{km,rs}^T P_{km}^T \end{aligned}$$

de onde se obtém

$$\boxed{\phi_{km,rs}^T = \frac{X_{kr} - X_{ks} - X_{mr} + X_{ms}}{x_{rs}}} \quad (4.46)$$

Problemas

1. Para o sistema cujos dados são apresentados a seguir:
 - (a) Escreva os dois subsistemas de equações utilizados na solução do problema de fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson. Explique como seriam resolvidos esses subsistemas.
 - (b) Apresente a estrutura dos sistemas de equações lineares a serem resolvidos em cada iteração dos métodos de Newton-Raphson e Desacoplado Rápido.
 - (c) Resolva o problema de fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson⁶ para valores crescentes da carga. Suponha um crescimento uniforme da carga e, correspondentemente da geração, em todas as barras mantendo um fator de potência constante. Trace as curvas V-P e V-Q correspondentes à variação da tensão na barra 4. Calcule os autovalores dos Jacobianos correspondentes às sucessivas soluções do fluxo de potência e comente sobre seus valores.
 - (d) Resolva o problema de fluxo de potência, utilizando o modelo linearizado de fluxo de potência ativa, para a condição inicial e final de carregamento da sequência de casos de fluxo de potência calculados no item (c). Compare os resultados com aqueles obtidos com o modelo não-linear.
 - (e) Calcule a variação do fluxo de potência na linha 1-2, devida ao desligamento de uma das linhas do ramo 2-3, usando o método dos fatores de distribuição.

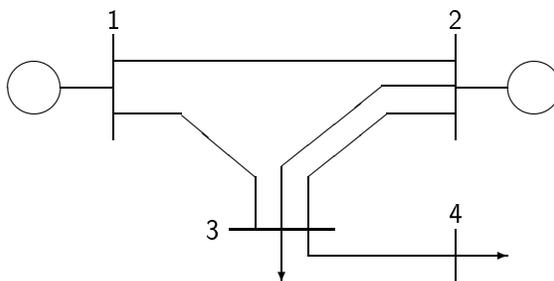


Figura 4.11: Sistema de 4 barras

⁶Sugestão: utilize o programa de cálculo de fluxo de potência disponível no Power System Toolbox (MATLAB).

Tabela 4.1: Dados de Barras

Barra	Tipo	Geração		Carga		Tensão (pu)
		MW	MVAR	MW	MVAR	
1	PV	50	-	0	0	1.03
2	$V\theta$	-	-	0	0	1.05
3	PQ	0	0	60	20	-
4	PQ	0	0	80	30	-

Tabela 4.2: Dados de Linhas (Base: 100 MVA)

Linha	Res. (pu)	Rea. (pu)	Sus. (pu)
1 - 2	0,080	0,300	0,060
1 - 3	0,010	0,080	0,030
2 - 3	0,040	0,200	0,040
2 - 3	0,040	0,200	0,040
3 - 4	0,015	0,100	0,020

Capítulo 5

Fluxo de Potência Ótimo

5.1 Introdução

O Fluxo de Potência Ótimo (FPO) tem como objetivo a otimização da condição estática de operação de um sistema de geração-transmissão de energia elétrica. Otimização no sentido de maximizar ou minimizar um determinado critério (função) sujeito a algumas restrições (equações e inequações). Por exemplo, a minimização das perdas ativas na transmissão sujeita a limites operacionais nos módulos das tensões e fluxos nas linhas.

Em comparação com o fluxo de potência convencional (FP), pode-se pensar no FPO como sendo uma ferramenta de síntese enquanto o FP é utilizado para análise. Com o FP obtém-se a solução da rede elétrica (tensões nodais, fluxos na linhas, etc.) para *uma* condição particular de operação (carga e geração). Com o FPO escolhe-se, entre as *infinitas* condições de operação possíveis para atender a demanda, uma que otimize o critério escolhido.

5.1.1 Formulação do Problema

O FPO é geralmente formulado como um problema de Programação Não-Linear¹, de acordo com o seguinte formato padrão [24, 14]

$$\min_{\mathbf{z}} f(\mathbf{z}) \quad (5.1)$$

$$\text{s. a } \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{z}) \leq 0 \quad (5.3)$$

onde

$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m+n}$ é o vetor de variáveis do problema o qual inclui o vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de *variáveis de estado* e o vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ de *variáveis de controle* tal que $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{u}^T]^T$;

¹Uma introdução à Programação Não-Linear é apresentada no Apêndice B

$f : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo;

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^p$ são as restrições de igualdade; e

$\mathbf{h} : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^q$ são as restrições de desigualdade.

Assumindo uma rede elétrica com 1000 nós ou barras, o problema definido em (5.1-5.3) apresentará cerca de 2000 variáveis, 2000 restrições de igualdade e mais de 5000 restrições de desigualdade. Em problemas práticos, um número pequeno de restrições de desigualdade são *ativas* na solução, isto é, somente algumas poucas variáveis da rede atingem seus limites operativos. Este fato pode ser explorado para simplificar o processo de solução do FPO.

5.1.2 Aplicações

O FPO tem aplicação em vários problemas de planejamento da expansão e da operação, e na operação em tempo-real, tais como:

- Despacho econômico e seguro (operação em tempo-real, simulação do despacho em estudos de planejamento da operação e expansão);
- Redespacho preventivo e corretivo (operação em tempo-real);
- Minimização de perdas;
- Alocação de fontes de potência reativa (planejamento da expansão do suporte de reativos);
- Avaliação da confiabilidade composta de sistemas geração e transmissão;
- Planejamento da expansão de sistemas de transmissão;
- Tarificação de serviços de transmissão;
- Determinação de preços nodais de energia.

5.1.3 Métodos de Solução: Histórico

Os primeiros estudos apresentando formulações e métodos de solução para o FPO foram publicados na década de 60 por Carpentier na França [7] e Dommel e Tinney nos EUA [11]. Na década de 70, vários aperfeiçoamentos foram propostos para essas formulações originais sem, entretanto, produzirem avanços significativos na velocidade e robustez dos algoritmos de solução. Uma proposta importante foi a introdução do conceito de FPO restrito pela segurança, isto é, uma solução ótima levando em consideração um conjunto de contingências prováveis de ocorrer no sistema [2].

No final da década de 70 e início dos 80s, começaram a surgir novas formulações e métodos de solução para o FPO que iriam formar a base dos

métodos atualmente considerados como os mais adequados para utilização prática. Dentre esses métodos devem ser citados:

- Programação Linear Seqüencial [25];
- Programação Quadrática Seqüencial [5];
- Método de Newton [10];
- Método dos Pontos Interiores [16].

5.2 Natureza do Problema

No FPO a demanda é, em geral, considerada conhecida e constante. A melhor maneira de atender essa demanda é obtida resolvendo-se o problema de FPO. Tendo em vista o desacoplamento natural entre fluxos de potência ativa e reativa, é comum considerar-se separadamente as fontes e grandezas controláveis relacionadas ao atendimento da demanda ativa e da demanda reativa e controle de tensão.

5.3 Formulação Matemática

5.3.1 Variáveis

O conjunto de variáveis integrantes da formulação do problema é dividido em dois subconjuntos:

Variáveis dependentes ou de estado (\mathbf{x})

É um conjunto mínimo de variáveis capazes de caracterizar unicamente o estado de operação da rede elétrica. Normalmente as variáveis escolhidas são os módulos e ângulos de fase das tensões nas barras de carga e ângulos de fase das tensões em barras de geração (tensão controlada). São as variáveis obtidas na solução de um FP.

Variáveis independentes ou de controle (\mathbf{u})

São as variáveis utilizadas para conduzir o processo de solução do FPO para uma solução ótima. Fisicamente, essas variáveis correspondem a dispositivos ou processos de controle existentes na rede elétrica. As variáveis normalmente utilizadas na prática são:

- Fluxo Ativo:
 - Potência ativa gerada;
 - Ângulo de fase de transformadores defasadores;

- Potência transmitida nos *links DC*;
- Fluxo de intercâmbio entre áreas.
- Fluxo Reativo:
 - Módulo da tensão em barras de geração;
 - Potência reativa gerada ou alocada;
 - Posição do *tap* de transformadores;
 - Susceptância *shunt* de bancos de capacitores; ou reatores.

No caso de uma barra de geração, a variável de controle associada ao fluxo de reativos pode ser tanto o módulo da tensão quanto a injeção de potência reativa. A escolha de um ou de outra depende do dispositivo de controle existente na barra e do método de solução adotado. Algumas variáveis de controle somente podem assumir valores discretos, por exemplo, posição de taps de transformadores, susceptância shunt de bancos de capacitores, etc.

5.3.2 Restrições de Igualdade

A solução do FPO corresponde a uma solução do FP que otimiza o critério escolhido. Portanto, esta solução deve satisfazer as equações que governam o fluxo de potência em uma rede elétrica as quais, em coordenadas polares, tem o aspecto seguinte:

$$\begin{aligned} P_k &= P_{Gk} - P_{Lk} \\ &= V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos \theta_{km} + B_{km} \text{sen} \theta_{km}), \quad k \in \Omega_P \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_{Gk} - Q_{Lk} \\ &= V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{sen} \theta_{km} - B_{km} \cos \theta_{km}), \quad k \in \Omega_Q \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde

$$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$$

$\{\Omega_k\}$: conjunto formado pela barra k e as barras conectadas à barra k ;

Ω_P e Ω_Q : conjuntos de barras da rede cuja definição depende do método de solução do FPO escolhido;

$G_{km} + jB_{km}$: elementos da matriz de admitâncias nodal da rede;

P_{Lk} e Q_{Lk} : carga ativa e reativa conectada à barra k .

Em alguns casos, pode ser necessária a introdução de restrições de igualdade adicionais na formulação do FPO. Por exemplo, pode-se desejar que o valor do intercâmbio de potência ativa entre duas áreas seja fixo ou que a soma da geração de um grupo de usinas seja igual a um valor pré-fixado para satisfazer restrições energéticas de médio ou longo prazos. Neste caso, equações representando essas restrições devem ser adicionadas ao conjunto básico dado em (5.4) a (5.5).

5.3.3 Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade são inequações representando limites físicos relacionados com a capacidade térmica de transmissão de potência dos componentes da rede ou limites operacionais relacionados com aspectos de segurança da operação do sistema de potência. As variáveis geralmente associadas a esses limites, agrupadas de acordo com sua maior influência no fluxo de ativos ou reativos, são listadas a seguir:

- Fluxo Ativo:
 - Potência ativa gerada;
 - Ângulo de fase de transformadores defasadores;
 - Potência transmitida nos *links DC*;
 - Fluxo de potência em ramos da rede (linhas ou transformadores);
 - Fluxo de potência ativa de intercâmbio entre áreas
 - Reserva girante em uma área;
 - Defasagem angular entre barras.
- Fluxo Reativo:
 - Módulo da tensão;
 - Potência reativa gerada;
 - Posição do *tap* de transformadores;
 - Susceptância *shunt* de bancos de capacitores ou reatores;
 - Fluxo de potência reativa em ramos da rede;
 - Fluxo de potência reativa de intercâmbio entre áreas
- Fluxo Ativo e Reativo:
 - Geração complexa (MVA);
 - Corrente nos ramos.

5.3.4 Função Objetivo

O estabelecimento de funções objetivo que consigam descrever adequadamente a *melhor* condição operativa da rede elétrica é o aspecto mais complexo da formulação do problema de FPO. Em muitos casos, a utilização de uma simples expressão matemática não consegue descrever adequadamente vários objetivos conflitantes e não perfeitamente caracterizáveis por fórmulas matemáticas. Em outros casos, a satisfação das restrições é mais importante que a otimização da função objetivo. Neste caso, pode-se usar uma função objetivo fictícia (*dummy*) ou até não definir nenhuma função objetivo.

A seguir são apresentados alguns exemplos de funções objetivo usadas em aplicações práticas.

Custo de geração mínimo

É a função objetivo usada para modelar o problema de despacho econômico. No caso de sistemas constituídos apenas por usinas térmicas, esta função assume o aspecto seguinte:

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{i \in \Omega_G} C_i(P_{G,i}) \quad (5.6)$$

onde Ω_G é o conjunto de barras de geração.

Perdas Mínimas

Esta função pode ser representada de duas maneiras:

- Minimização da injeção de potência ativa na barra(s) flutuante(s);
- Somatório das perdas ativas em todos os ramos da rede.

Esta função é muitas vezes utilizada como uma função objetivo fictícia quando o verdadeiro objetivo é se obter uma solução do fluxo de potência onde todas as restrições são satisfeitas.

Mínimo Custo de Alocação de Fontes de Reativos

Esta função objetivo é utilizada no planejamento da instalação de novas fontes de potência reativa. O objetivo do problema é determinar a capacidade e local de instalação das novas fontes que satisfaçam as restrições de tensão do sistema com custo mínimo. Uma possível função objetivo é

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{i \in \Omega_G} C_i(Q_{G,i}) \quad (5.7)$$

onde $C_i(Q_{G,i})$ é o custo de instalação de uma fonte de capacidade $Q_{G,i}$. Dependendo do tipo de fonte de reativos (capacitores e indutores, por exemplo), a variável $Q_{G,i}$ assume apenas valores discretos o que torna mais difícil a solução do problema.

Mínimo Corte de Carga

Esta função objetivo é utilizada para resolver situações de emergência nas quais o desligamento de parte da carga é a única solução possível para aliviar sobrecargas e tensões fora dos limites. Porém, o corte de carga deve ser mínimo ponderado pela importância das cargas. Uma possível função objetivo nesse caso é

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{i \in \Omega_L} \omega_i(P_{L,i}) \quad (5.8)$$

onde Ω_L define o conjunto de barras onde é admitido o corte de carga, $P_{L,i}$ é a parcela da carga a ser cortada na barra i e ω_i é uma ponderação que define a importância da carga nessa barra.

Desvio Mínimo do Ponto de Operação

Esta função tem como objetivo obter uma solução o mais próximo possível de um ponto de operação previamente estabelecido em um outro estudo (otimização energética, segurança dinâmica, etc.) porém não possível de ser implementado. A função é definida por

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{k \in \Omega_d} [\omega_k(y_k - y_k^0)] \quad (5.9)$$

onde Ω_d é o conjunto de variáveis y_k considerado, y_0 é o valor determinado pelo estudo anterior e ω_k é uma ponderação.

5.4 Fluxo de Potência Ótimo Linearizado

Antes de apresentar os métodos de solução do problema de FPO, como formulado nas seções anteriores, será apresentada uma versão linearizada do mesmo. Esta formulação, além de facilitar a introdução dos métodos de solução, tem utilidade prática em várias aplicações, particularmente em estudos de operação econômica [8].

A formulação linearizada do FPO baseia-se no modelo de fluxo de potência linearizado apresentado no Capítulo 4. Desta forma, apenas o fluxo de potência ativa é considerado. Nesta notas, será considerado apenas o caso particular onde o objetivo é a minimização do custo total de operação, representado pelo custo de geração. Este objetivo é normalmente utilizado em estudos econômicos. A formulação pode ser facilmente estendida a outros objetivos. O problema pode, então, ser formulado [8] como um problema de Programação Linear² (PL), como mostrado a seguir:

²Uma breve introdução à Programação Linear é apresentada no Apêndice C.

$$\text{Minimizar } z = c_1 P_{G_1} + c_2 P_{G_2} + \dots + c_n P_{G_n} \quad (5.10)$$

Sujeito a

$$\left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{B}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} P_{G_1} \\ P_{G_2} \\ \vdots \\ P_{G_n} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -P_{D_1} \\ -P_{D_2} \\ \vdots \\ -P_{D_n} \end{array} \right] \quad (5.11)$$

$$P_{G_i}^{min} \leq P_{G_i} \leq P_{G_i}^{max}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{x_{ij}}(\theta_i - \theta_j) + s_{ij} = f_{ij}^{max}, \quad ij \in \Omega_r \quad (5.13)$$

$$0 \leq s_{ij} \leq 2f_{ij}^{max}, \quad ij \in \Omega_r \quad (5.14)$$

$$\theta_{ref} = 0 \quad (5.15)$$

onde

n : número de barras da rede;

ref : índice da barra utilizada com referência angular da rede;

c_i : custo incremental da geração na barra i (R\$/MWh);

P_{G_i} : geração ativa na barra i (MW);

P_{D_i} : carga ativa na barra i (MW);

θ_i : ângulo de fase da tensão na barra i (rad);

$\bar{\mathbf{B}}$: matriz definida em (4.9);

$P_{G_i}^{min}, P_{G_i}^{max}$: limites mínimo e máximo da geração na barra i (MW);

f_{ij}^{max} : limite máximo do fluxo de potência no ramo ij (MW);

s_{ij} : variável de folga associada ao fluxo de potência no ramo ij (MW);

Ω_r : conjunto de ramos da rede.

As restrições estabelecidas em (5.13) e (5.14) representam os limites no fluxo dos ramos da rede e são equivalentes a

$$-f_{ij}^{max} \leq f_{ij} \leq f_{ij}^{max}, \quad ij \in \Omega_r \quad (5.16)$$

onde

f_{ij} : fluxo de potência no ramo ij (MW).

A restrição representada por (5.15) tem como objetivo estabelecer a referência angular das tensões da rede.

Para manter a generalidade da formulação do FPO linearizado, as variáveis correspondentes à geração ativa (P_{G_i}) são mantidas em todas as barras. Na formulação de um problema específico, as variáveis associadas a barras onde não há geração podem ser excluídas ou, alternativamente, podem ser atribuídos valores nulos aos limites de geração ativa $P_{G_i}^{min}$ e $P_{G_i}^{max}$.

Exemplo 5.1 *Considere o sistema com três barras utilizado no Exemplo 4.2, ao qual se acrescenta os valores relativos aos custos de geração e limites dados a seguir:*

$$\begin{aligned} c_1 &= 80 \text{ R\$/MWh}; & P_{G_1}^{min} &= 0 \text{ MW}; & P_{G_1}^{max} &= 50 \text{ MW}; \\ c_2 &= 100 \text{ R\$/MWh}; & P_{G_2}^{min} &= 0 \text{ MW}; & P_{G_2}^{max} &= 50 \text{ MW}; \\ f_{12}^{max} &= 10 \text{ MW}; & f_{13}^{max} &= 50 \text{ MW}; & f_{23}^{max} &= 50 \text{ MW}. \end{aligned}$$

O problema de FPO linearizado, com o objetivo de minimização do custo total de geração, pode, então, ser formulado como:

$$\text{Minimizar } z = 80P_{G_1} + 100P_{G_2}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} 22,5 & -10,0 & -12,5 \\ -10,0 & 30,0 & -20,0 \\ -12,5 & -20,0 & 32,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,80 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq P_{G_1} \leq 0,50$$

$$0 \leq P_{G_2} \leq 0,50$$

$$\frac{1}{0,10}(\theta_1 - \theta_2) + s_{12} = 0,10$$

$$\frac{1}{0,08}(\theta_1 - \theta_3) + s_{13} = 0,50$$

$$\frac{1}{0,05}(\theta_2 - \theta_3) + s_{23} = 0,50$$

$$0 \leq s_{12} \leq 0,20$$

$$0 \leq s_{13} \leq 1,00$$

$$0 \leq s_{23} \leq 1,00$$

$$\theta_1 = 0$$

O problema de PL acima pode ser apresentado na forma abaixo onde as restrições de igualdade foram agrupadas em um único sistema de equações:

$$\text{Minimizar } z = 80P_{G_1} + 100P_{G_2}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} 22,5 & -10,0 & -12,5 & -1 & & & & & & \\ -10,0 & 30,0 & -20,0 & & -1 & & & & & \\ -12,5 & -20,0 & 32,5 & & & & & & & \\ \hline 10,0 & -10,0 & & & & & 1 & & & \\ 12,5 & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \hline P_{G_1} \\ P_{G_2} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,80 \\ 0,10 \\ 0,50 \\ 0,50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq P_{G_1} \leq 0,50$$

$$0 \leq P_{G_2} \leq 0,50$$

$$0 \leq s_{12} \leq 0,20$$

$$0 \leq s_{13} \leq 1,00$$

$$0 \leq s_{23} \leq 1,00$$

O problema de PL acima pode ser resolvido utilizando-se qualquer método de solução de problemas de PL³, como, por exemplo, o Método Simplex apresentado no Apêndice C. A solução do problema acima produz os resultados mostrados na Figura 5.1.

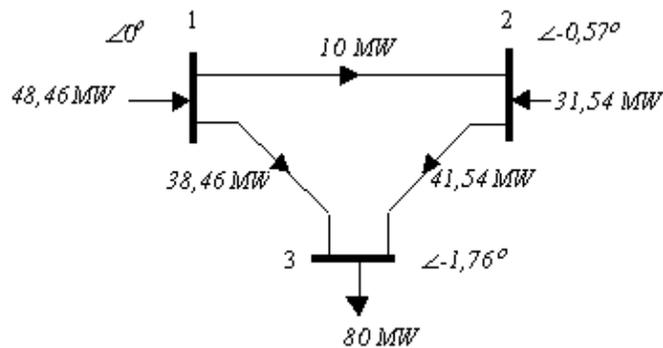


Figura 5.1: Solução do problema do Exemplo 5.1.

³Para uma solução computacional desse problema, e de outros exemplos mostrados nestas notas, recomenda-se a utilização da função *linprog* do Matlab©.

Para a solução apresentada na Figura 5.1, o custo total de operação é de 5.576,92 R\$/h. Observe que nessa solução, o fluxo na linha 1-2 é igual ao seu limite máximo, o que indica uma limitação no sistema de transmissão.

A solução do problema de PL produz, também, os multiplicadores de Lagrange ou variáveis duais associadas às restrições de igualdade e desigualdade. Esses multiplicadores representam sensibilidades da função objetivo em relação a variações no termo independente das restrições de igualdade ou nos limites das restrições de desigualdade. No problema em questão, os multiplicadores de maior interesse são:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 50,00 \text{ R\$/MWh}; & \pi_{12} &= 88,76 \text{ R\$/MWh}; \\ \pi_2 &= 100,00 \text{ R\$/MWh}; & \pi_{13} &= 0,00 \text{ R\$/MWh}; \\ \pi_3 &= 80,77 \text{ R\$/MWh}; & \pi_{23} &= 0,00 \text{ R\$/MWh}.\end{aligned}$$

Os multiplicadores π_1, π_2 e π_3 são relacionados às equações de equilíbrio de potência nos respectivos nós enquanto os multiplicadores π_{12}, π_{13} e π_{23} são associados aos limites no fluxo das linhas. O primeiro conjunto de multiplicadores representa o Custo Marginal de Operação nas barras da rede, isto é, o custo para atender uma unidade extra de demanda. O segundo conjunto indica quanto poderia ser reduzido no custo total da geração caso os limites no fluxo das linhas fossem aumentados de uma unidade. No caso, apenas a restrição na linha 1-2 é efetiva e, portanto, o respectivo multiplicador é diferente de zero.

A formulação do FPO linearizado apresentada nas equações (5.10) a (5.15) inclui os ângulos de fase das tensões nodais. Em muitas aplicações, particularmente aquelas na área econômica, não há necessidade do cálculo explícito dessas variáveis. Utilizando a matriz β definida em (4.4), é possível reformular o problema de PL mantendo como variáveis apenas as gerações em cada barra da rede. Desta forma, obtem-se um problema de PL com dimensões menores. Por outro lado, deve-se observar que a matriz β é cheia, o que reduz o grau de esparsidade da formulação.

A seguir é apresentada essa nova formulação do FPO linearizado. Observe que a matriz β é definida adotando-se uma das barras da rede como referência e, conseqüentemente, a coluna correspondente a essa barra não é incluída na matriz. Por essa razão, é necessário a inclusão de uma restrição de igualdade adicional para garantir o balanço de potência na rede. Sem perda de generalidade, na formulação abaixo a barra 1 é utilizada como barra de referência.

Minimizar $c_1 P_{G_1} + c_2 P_{G_2} + \dots + c_n P_{G_n}$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{G_2} \\ P_{G_3} \\ \vdots \\ P_{G_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{13} \\ \vdots \\ s_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{12}^{max} \\ f_{13}^{max} \\ \vdots \\ f_{mn}^{max} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{13} \\ \vdots \\ r_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$P_{G_i}^{min} \leq P_{G_i} \leq P_{G_i}^{max}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.18)$$

$$0 \leq s_{ij} \leq 2f_{ij}^{max}, \quad ij \in \Omega_r \quad (5.19)$$

onde

$$\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{13} \\ \vdots \\ r_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{D_2} \\ P_{D_3} \\ \vdots \\ P_{D_n} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Exemplo 5.2 O problema de FPO linearizado apresentado no exemplo 5.1 pode ser reformulado, utilizando a matriz β calculada em 4.3, como mostrado a seguir:

Minimizar $z = 80P_{G_1} + 100P_{G_2}$

Sujeito a

$$P_{G_1} + P_{G_2} = 0,80$$

$$\begin{bmatrix} -0,5652 & -0,3478 \\ -0,4348 & -0,6522 \\ 0,4348 & -0,3478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{G_2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{13} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,2782 \\ -0,5218 \\ -0,2782 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq P_{G_1} \leq 0,50$$

$$0 \leq P_{G_2} \leq 0,50$$

$$0 \leq s_{12} \leq 0,20$$

$$0 \leq s_{13} \leq 1,00$$

$$0 \leq s_{23} \leq 1,00$$

o qual pode, ainda, ser reescrito no formato padrão de um problema de PL, como:

Minimizar $z = c_1 P_{G_1} + c_2 P_{G_2}$
 Sujeito a

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0,5652 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,4348 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,4348 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8000 \\ -0,1782 \\ -0,0218 \\ 0,2218 \end{bmatrix}$$

$$0 \leq P_{G_1} \leq 0,50$$

$$0 \leq P_{G_2} \leq 0,50$$

$$0 \leq s_{12} \leq 0,20$$

$$0 \leq s_{13} \leq 1,00$$

$$0 \leq s_{23} \leq 1,00$$

A solução do problema de PL acima definido produz os mesmos resultados obtidos no exemplo 5.1.

5.5 Fluxo de Potência Ótimo Linearizado com Restrições de Segurança

Em muitas aplicações, é necessário obter-se um ponto de operação que otimize algum critério e satisfaça as restrições, tanto na condição normal de operação quanto em contingências. Um ponto de operação que satisfaça esse critério é denominado *seguro* e a formulação do problema é dita satisfazer *restrições de segurança*.

O modelo de FPO linearizado, apresentado na seção anterior, pode ser estendido de forma a considerar restrições de segurança através da introdução de restrições adicionais que modelem o desligamento de um ou mais circuitos da rede. No caso de contingências associadas a geradores, esse procedimento não é necessário pois é suficiente alterar os limites operativos dos mesmos.

A inclusão de uma restrição para cada circuito da rede tornaria a dimensão do problema muito elevada. Além disso, em aplicações práticas observa-se que, em geral, apenas um pequeno conjunto de ramos da rede apresenta violações em seu carregamento, para uma determinada contingência. Por esta razão, o procedimento normalmente adotado é resolver o FPO sem a consideração de contingências e depois realizar uma análise de contingências, na qual a retirada de cada circuito da rede é simulada. A partir dessa análise, são identificados os ramos em sobrecarga e as restrições de segurança são adicionadas apenas para esses ramos.

Para uma contingência no ramo rs da rede, com uma correspondente sobrecarga no ramo km , as restrições a serem adicionadas ao FPO são:

$$-\eta f_{km}^{max} \leq f_{km}^c \leq \eta f_{km}^{max} \quad (5.21)$$

onde f_{km}^c é o fluxo pós-contingência e $\eta \geq 1$ é um fator determinando a sobrecarga admissível durante a contingência no ramo km , respectivamente.

As restrições representadas em 5.21 podem ser colocadas na forma das restrições dadas em 5.13 e 5.14, como a seguir:

$$\frac{1}{x_{km}} (\theta_k - \theta_m) + \phi_{km,rs}^D \frac{1}{x_{rs}} (\theta_r - \theta_s) + s_{km,rs} = \eta f_{km}^{max} \quad (5.22)$$

$$0 \leq s_{km,rs} \leq 2\eta f_{km}^{max} \quad (5.23)$$

onde $\phi_{km,rs}^D$ é o fator de distribuição para desligamento de ramo definido em 4.39.

Exemplo 5.3 *Suponha que no exemplo 5.1 seja considerada uma contingência no ramo 2-3, a qual produz uma variação na reatância desse ramo do valor 0.05 pu para 0.20 pu, como resultado do desligamento de alguns circuitos em paralelo. Nesta nova configuração, o fluxo de potência na rede é dado na figura 5.2(a). Observe nessa figura que, para essa contingência, ocorre uma sobrecarga no ramo 1-3.*

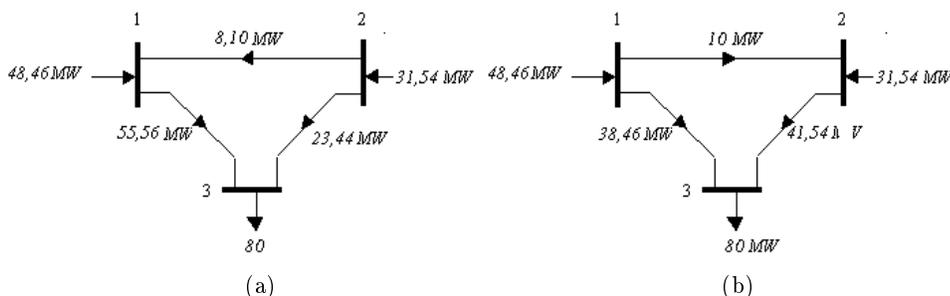


Figura 5.2: Solução do problema do Exemplo 5.3.

Para esta contingência, o fator de distribuição para desligamento de ramo é dado por:

$$\phi_{13,23}^D = \frac{\Delta f_{13}}{f_{23}} = \frac{55,56 - 38,46}{41,54} = 0,4116$$

Neste caso, o problema de FPO linearizado, incorporando a restrição no fluxo da linha 1-3, adotando $\eta = 1$, é formulado como:

$$\text{Minimizar } z = 80P_{G_1} + 100P_{G_2}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} 22,5 & -10,0 & -12,5 \\ -10,0 & 30,0 & -20,0 \\ -12,5 & -20,0 & 32,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{G_1} \\ P_{G_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_{G_1} \leq 0,50 \\ 0 &\leq P_{G_2} \leq 0,50 \\ \frac{1}{0,10}(\theta_1 - \theta_2) &+ s_{12} = 0,10 \\ \frac{1}{0,08}(\theta_1 - \theta_3) &+ s_{13} = 0,50 \\ \frac{1}{0,05}(\theta_2 - \theta_3) &+ s_{23} = 0,50 \\ \frac{1}{0,08}(\theta_1 - \theta_3) + 0,4116 \times \frac{1}{0,05}(\theta_2 - \theta_3) &+ s_{13,23} = 0,50 \quad (*) \\ 0 &\leq s_{12} \leq 0,20 \\ 0 &\leq s_{13} \leq 1,00 \\ 0 &\leq s_{23} \leq 1,00 \\ 0 &\leq s_{13,23} \leq 1,00 \quad (*) \\ \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

onde (*) indica as duas restrições adicionadas em relação à formulação apresentada no exemplo 5.1.

5.6 Método de Dommel & Tinney

O método de Dommel & Tinney foi um dos primeiros métodos propostos para a solução do FPO [11]. Atualmente esse método tem apenas um valor didático pois, nos últimos anos, foram propostos métodos que apresentam desempenho computacional e algorítmico bastante superiores ao método citado. Entretanto, o método de Dommel & Tinney continua apresentando interesse do ponto de vista didático pela sua simplicidade e desenvolvimento intuitivo.

5.6.1 FPO sem Restrições de Desigualdade

De acordo com a formulação geral do problema de FPO apresentada em (5.1) a (5.3), o problema sem restrições de desigualdade é dado por:

$$\min_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.24)$$

$$\text{s. a } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

Nesta formulação, os conjuntos de equações definindo as restrições de igualdade em (5.25) são

Ω_P : Todas as barras da rede exceto a barra flutuante;

Ω_Q : Barras de carga.

Para o problema acima, a função Lagrangeana é definida por:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5.26)$$

A condição necessária para que um ponto seja solução do problema definido em (5.24) e (5.25), como mostrado no Apêndice B, subseção B.3.2, é

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \lambda = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} + \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \lambda = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (5.29)$$

De (5.27), obtemos:

$$\lambda = - \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right\}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.30)$$

a qual, substituída em (5.28), produz:

$$\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right\}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.31)$$

o qual é conhecido como o *Gradiente Reduzido* de $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ em relação às variáveis de controle (\mathbf{u}). Esse vetor indica a direção oposta àquela na qual as variáveis de controle deverão ser alteradas para diminuir o valor da função objetivo. Essa alteração nas variáveis de controle provoca uma correspondente alteração nas variáveis de estado (\mathbf{x}) determinada por (5.29).

A partir de (5.29) e (5.31), podemos estabelecer o algoritmo abaixo o qual é similar ao algoritmo do Método do Gradiente visto no Apêndice B.

Algoritmo de Dommel & Tinney

Inicialize o contador: $k = 0$

Atribua valor inicial às variáveis de controle: \mathbf{u}^0

Faça enquanto $\|\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\| > \epsilon$

Resolva o fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson para \mathbf{u}^k obtendo como solução \mathbf{x}^k

Calcule $\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)$

Calcule $\Delta\mathbf{u}^k = -\alpha^k \nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)$

Calcule $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}^k$

Atualize o contador: $k = k + 1$

Fim_faça

O valor do passo α^k no algoritmo acima pode ser estabelecido por um processo de minimização de $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ na direção contrária a $\nabla_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ou por procedimentos heurísticos.

5.6.2 Restrições de desigualdade nas variáveis de controle

Restrições de desigualdade nas variáveis de controle, representando limites operativos dos dispositivos responsáveis por ações de controle, podem ser facilmente introduzidas no algoritmo apresentado na seção anterior. No passo k do algoritmo, as variáveis de controle são atualizadas de acordo com a seguinte lógica:

$$u_j^{k+1} = \begin{cases} u_j^{max} & \text{se } u_j^k + \Delta u_j^k > u_j^{max} \\ u_j^{min} & \text{se } u_j^k + \Delta u_j^k < u_j^{min} \\ u_j^k + \Delta u_j^k & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (5.32)$$

No caso de uma das variáveis de controle atingir um dos limites em um dos passos do algoritmo, essa variável deve continuar a ser atualizada nos próximos passos do algoritmo pois pode acontecer da mesma deixar de violar seu respectivo limite.

5.6.3 Restrições de desigualdade funcionais e nas variáveis de estado

A técnica descrita na seção anterior, para o tratamento de restrições de desigualdade em variáveis de controle, não se aplica ao caso desse tipo de restrições na variáveis de estado ou restrições funcionais. Neste caso, a violação da restrição somente é detectada após a solução do fluxo de potência e sua correção exige uma nova atualização das variáveis de controle utilizando alguma técnica de sensibilidade, seguida de nova solução do fluxo de potência. Várias técnicas de tratamento de restrições de desigualdade podem ser

empregadas neste caso. Dentre as citadas em [11], encontram-se técnicas de programação linear, troca de variáveis e método das penalidades. Esta última é a recomendada em [11] por sua simplicidade e eficiência computacional.

Como descrito no Apêndice B, subseção B.5.1, o método das penalidades (exteriores) consiste em se adicionar termos à função objetivo correspondentes a violações de restrições. No caso de restrições nas variáveis dependentes (\mathbf{x}), temos:

$$F(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) = f(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) + \sum_{i=1}^{np} \omega_i p_i(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) \quad (5.33)$$

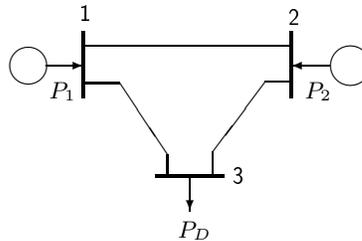
onde ω_i é uma ponderação e p_i é definida, por exemplo, como

$$p_i(\mathbf{x}^k) = \begin{cases} (x_i^k - x_i^{min})^2 & \text{se } x_i^k < x_i^{min} \\ (x_i^k - x_i^{max})^2 & \text{se } x_i^k > x_i^{max} \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (5.34)$$

Para as restrições funcionais, a função penalidade assume a forma

$$p_i(\mathbf{x}^k) = \begin{cases} 0 & \text{se } h_i(\mathbf{x}^k) \leq 0 \\ [h_i(\mathbf{x}^k)]^2 & \text{se } h_i(\mathbf{x}^k) > 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

Exemplo 5.4 Para o sistema da figura abaixo, obtenha a solução do problema de FPO pelo método de Dommel & Tinney, considerando como objetivo a minimização do custo de operação e as restrições impostas pelos limites máximos e mínimos na capacidade dos geradores. Assuma conhecidas as tensões terminais dos geradores e da barra de carga.



Dados:

Custos de geração: $C_1(P_1) = \alpha P_1^2$ e $C_2(P_2) = \alpha P_2^2$;

Carga: P_D ;

Parâmetros das linhas.

A solução do problema pode ser obtida nos seguintes passos:

1. Formulação do Problema:

Considerando apenas o fluxo de potência ativa⁴, as variáveis do problema são

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} P_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

A função objetivo é definida como

$$f(\theta_2, \theta_3, P_2) = \alpha_1 [P_1(\theta_2, \theta_3)]^2 + \alpha_2 P_2^2$$

onde

$$P_1(\theta_2, \theta_3) = G_{11} + G_{12} \cos \theta_2 - B_{12} \sin \theta_2 + G_{13} \cos \theta_3 - B_{13} \sin \theta_3$$

As restrições de igualdade são dadas por

$$\begin{aligned} g_1(\theta_2, \theta_3, P_2) &= P_2 - G_{22} - G_{21} \cos \theta_2 - B_{21} \sin \theta_2 - G_{23} \cos (\theta_2 - \theta_3) + \\ &\quad - B_{23} \sin (\theta_2 - \theta_3) = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} g_2(\theta_2, \theta_3, P_2) &= -P_D - G_{33} - G_{31} \cos \theta_3 - B_{31} \sin \theta_3 - G_{32} \cos (\theta_3 - \theta_2) + \\ &\quad - B_{32} \sin (\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

e as de desigualdade por

$$\begin{aligned} P_1(\theta_2, \theta_3) - P_1^{max} &\leq 0 \\ -P_1(\theta_2, \theta_3) + P_1^{min} &\leq 0 \\ P_2 - P_2^{max} &\leq 0 \\ -P_2 + P_2^{min} &\leq 0 \end{aligned}$$

2. Gradiente Reduzido:

O gradiente reduzido em relação à variável de controle P_2 é dado por

$$\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right\}^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial P_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial P_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \\ 2\alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial P_2} = 2\alpha_2 P_2$$

⁴As tensões nas três barras são consideradas iguais a 1.0 pu e a barra 1 como barra flutuante.

Portanto,

$$\nabla_{P_2} f(\theta_2, \theta_3, P_2) = 2\alpha_2 P_2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2\alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \\ 2\alpha_1 \frac{\partial P_1}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

3. Solução pelo Método de Dommel & Tinney

A solução do problema, usando o algoritmo de Dommel & Tinney, consiste em resolver o sistema de equações definido em (5.36) e (5.37) para um valor inicial de P_2 , ou seja, resolver um problema de fluxo de potência considerando apenas a parte ativa, e aplicar uma correção em P_2 usando a direção contrária a $\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ como direção de busca. Esse processo é repetido até que um critério de convergência seja alcançado. Caso alguma restrição de desigualdade seja violada durante o processo iterativo, funções penalidades correspondentes a essas violações devem ser adicionadas à função objetivo, o que produzirá alterações nos termos $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ e $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$.

5.7 Método de Newton

O método de Newton, para solução do FPO [10], baseia-se na técnica do *Conjunto Ativo* para o tratamento de restrições de desigualdade, como definido no Apêndice B, subseção B.3.3. Supondo conhecido o conjunto de restrições de desigualdade ativas na solução, o problema pode ser transformado em um problema contendo apenas restrições de igualdade. A determinação do conjunto ativo é um problema complexo para o qual existem várias estratégias de solução. Uma delas será apresentada a seguir.

No método de Newton não é necessário uma divisão das variáveis do problema em variáveis independentes (ou de controle) e variáveis dependentes, como no caso do método de Dommel & Tinney. Tampouco utiliza-se um subsistema das equações de injeção de potência ativa e reativa como restrições de igualdade. Portanto, na formulação desse método, as variáveis do problema serão representadas por um único vetor (\mathbf{z}) e o conjunto completo de equações de injeção de potência em todas as barras do sistema será representado, genericamente, por $\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$.

5.7.1 Formulação Básica

Supondo conhecido o conjunto de restrições de desigualdade ativo na solução, o problema de FPO pode ser formulado como

$$\min_{\mathbf{z}} \quad f(\mathbf{z}) \quad (5.38)$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{h}_a(\mathbf{z}) = 0 \quad (5.40)$$

onde $\mathbf{h}_a: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^a$ representa as a restrições de desigualdade ativas.

Para o problema acima, a função Lagrangeana é definida por

$$L(\mathbf{z}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{z}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mu^T \mathbf{h}_a(\mathbf{z}) \quad (5.41)$$

A condição necessária para que um ponto seja solução do problema definido em (5.38) a (5.40) é

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{z}} + \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right]^T \lambda + \left[\frac{\partial \mathbf{h}_a}{\partial \mathbf{z}} \right]^T \mu = 0 \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0 \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \mathbf{h}_a(\mathbf{z}) = 0 \quad (5.44)$$

As equações (5.42) a (5.44) constituem um sistema de equações não-lineares, o qual representaremos de forma compacta por

$$\phi(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (5.45)$$

onde $\mathbf{y} = [\mathbf{z}^T \ \lambda^T \ \mu^T]^T$.

O sistema de equações (5.45) pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson através do seguinte processo iterativo

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \Delta \mathbf{y}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.46)$$

onde $\Delta \mathbf{y}^k$ é obtido resolvendo-se o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(\mathbf{z}^k, \lambda^k, \mu^k)}{\partial \mathbf{z}^2} & \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} \right]^T & \left[\frac{\partial \mathbf{h}_a(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} \right]^T \\ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{h}_a(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}^k \\ \Delta \lambda^k \\ \Delta \mu^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} - \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} \right]^T \lambda^k - \left[\frac{\partial \mathbf{h}_a(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}} \right]^T \mu^k \\ -\mathbf{g}(\mathbf{z}^k) \\ -\mathbf{h}_a(\mathbf{z}^k) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

onde

$$\frac{\partial^2 L(\mathbf{z}^k, \lambda^k, \mu^k)}{\partial \mathbf{z}^2} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}^2} + \left[\frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}^2} \right]^T \lambda^k + \left[\frac{\partial^2 \mathbf{h}_a(\mathbf{z}^k)}{\partial \mathbf{z}^2} \right]^T \mu^k$$

5.7.2 Seleção do Conjunto de Restrições Ativas

Não existe uma maneira direta para determinar o conjunto ativo. Os métodos utilizados para identificar esse conjunto, em geral, utilizam um processo iterativo. Um conjunto inicial de restrições ativas é escolhido, e então, uma

solução do problema definido em (5.38)-(5.40) é obtida. Se o conjunto ativo não for o correto, o mesmo será atualizado pela adição de novas restrições e retirada de restrições antigas não mais consideradas ativas. O problema é, então, resolvido novamente.

Uma das maneiras possíveis de implementar essa estratégia, no caso do FPO, é a seguinte [10]:

1. Escolha um conjunto inicial de restrições ativas. Em geral, as restrições ativas na solução do caso base (fluxo de potência convencional).
2. Resolva o sistema de equações definido em (5.45).
3. Se alguma restrição não incluída no conjunto ativo for violada, inclua esta restrição no conjunto ativo no próximo ciclo do processo de solução.
4. Retire do conjunto ativo as restrições representando limites superiores (inferiores) cujos multiplicadores de Lagrange obtidos neste ciclo do processo sejam negativos (positivos)⁵.
5. Volte para o passo 2.

5.8 Método dos Pontos Interiores

Para solução do FPO pelo método dos pontos interiores, a formulação do problema dada por (5.1) a (5.3) será modificada para uma forma equivalente, mais adequada para o desenvolvimento do citado método, na qual as restrições de desigualdade são do tipo restrições *canalizadas* nas variáveis. O problema a ser resolvido passa, então, a ter o seguinte enunciado⁶

$$\min_{\mathbf{z}} \quad f(\mathbf{z}) \quad (5.48)$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{l} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{u} \quad (5.50)$$

onde \mathbf{l} e \mathbf{u} são vetores em \mathbb{R}^n definindo limites inferiores e superiores nas variáveis de estado, variáveis de controle e variáveis de folga associadas às restrições funcionais⁷.

No desenvolvimento do método dos pontos interiores primal-dual [16, 31, 30], os seguintes passos devem ser seguidos:

⁵Uma justificativa para este procedimento é derivada das condições de Karush-Kuhn-Tucker como apresentado em [19](capítulo 10).

⁶As mesmas observações relativas a variáveis e equações do fluxo de potência contida na introdução ao método de Newton são válidas para o método dos pontos interiores.

⁷As restrições de desigualdade funcionais, do tipo $h_i(\mathbf{z}) \leq 0$, podem ser transformadas em restrições de igualdade pela introdução de variáveis de folga, passando a ter o aspecto seguinte: $h_i(\mathbf{z}) + v_i = 0$, $v_i \geq 0$.

1. Transformar as restrições de desigualdade definidas por (5.50) em restrições de igualdade pela introdução de variáveis de folga

$$\mathbf{z} - \mathbf{s}_l = \mathbf{l} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{z} + \mathbf{s}_u = \mathbf{u} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{s}_l \geq \mathbf{0} \quad (5.53)$$

$$\mathbf{s}_u \geq \mathbf{0} \quad (5.54)$$

onde \mathbf{s}_l e \mathbf{s}_u são vetores em \mathbb{R}^n cujas componentes são as variáveis de folga associadas às restrições canalizadas nas variáveis.

2. Transformar o problema com restrições de igualdade e desigualdade (não negatividade de \mathbf{s}_l e \mathbf{s}_u) em uma seqüência de problemas com restrições de igualdade apenas, mediante a adição à função objetivo de funções penalidades do tipo barreira logaritmica associadas a \mathbf{s}_l e \mathbf{s}_u . Cada problema dessa seqüência, parametrizada pelo *parâmetro barreira* $\mu > 0$, é definido por

$$\min \quad f(\mathbf{z}) - \mu \sum_{j=1}^m \ln s_{lj} - \mu \sum_{j=1}^m \ln s_{uj} \quad (5.55)$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (5.56)$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{s}_l = \mathbf{l} \quad (5.57)$$

$$\mathbf{z} + \mathbf{s}_u = \mathbf{u} \quad (5.58)$$

3. Transformar cada problema da seqüência definida acima em um problema sem restrições usando a seguinte função Lagrangeana

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}, \lambda, \pi_l, \pi_u, \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_u) &= f(\mathbf{z}) - \mu \sum_{j=1}^m \ln s_{lj} - \mu \sum_{j=1}^m \ln s_{uj} + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{z}) + \\ &+ \pi_l^T (\mathbf{z} - \mathbf{s}_l - \mathbf{l}) + \pi_u^T (\mathbf{z} + \mathbf{s}_u - \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde λ , π_l e π_u são vetores de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de igualdade (variáveis duais).

A função Lagrangeana definida em (5.59) tem um ponto estacionário satisfazendo as seguintes condições

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} = \nabla f(\mathbf{z}) + \lambda^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}) + \pi_l + \pi_u = \mathbf{0} \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_l} = \mathbf{z} - \mathbf{s}_l - \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \pi_u} = \mathbf{z} + \mathbf{s}_u - \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}_l} = -\mu \mathbf{S}_l^{-1} \mathbf{e} - \pi_l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\mu \mathbf{e} = \mathbf{S}_l \pi_l \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}_u} = \mu \mathbf{S}_u^{-1} \mathbf{e} + \pi_u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu \mathbf{e} = \mathbf{S}_u \pi_u \quad (5.65)$$

onde \mathbf{S}_l e \mathbf{S}_u são matrizes diagonais cujos elementos são as componentes de \mathbf{s}_l e \mathbf{s}_u , respectivamente, e \mathbf{e} é um vetor com todos os elementos iguais a 1.

O sistema de equações definido por (5.60) a (5.65) pode ser resolvido pelo método de Newton. Neste caso, o sistema de equações lineares a ser resolvido em cada iteração é dado por

$$\left[\nabla^2 f(\mathbf{z}) + \lambda^T \nabla^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}) \right] \Delta \mathbf{z} + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}) \Delta \lambda + \Delta \pi_l + \Delta \pi_u = \mathbf{t} \quad (5.66)$$

$$\nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}) \Delta z = -\mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad (5.67)$$

$$-\Pi_l \Delta \mathbf{s}_l - \mathbf{s}_l \Delta \pi_l = -(\mu \mathbf{e} - \mathbf{s}_l \pi_l) \quad (5.68)$$

$$-\Pi_u \Delta \mathbf{s}_u - \mathbf{s}_u \Delta \pi_u = -(\mu \mathbf{e} + \mathbf{s}_u \pi_u) \quad (5.69)$$

$$\Delta \mathbf{z} - \Delta \mathbf{s}_l = -(\mathbf{z} - \mathbf{s}_l - \mathbf{l}) \quad (5.70)$$

$$\Delta \mathbf{z} - \Delta \mathbf{s}_u = -(\mathbf{z} + \mathbf{s}_u - \mathbf{u}) \quad (5.71)$$

onde

$$\mathbf{t} = -\nabla f(\mathbf{z}) - \lambda^T \nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}) - \pi_l - \pi_u \quad (5.72)$$

e Π_l, Π_u são matrizes diagonais cujos elementos são os componentes de π_l e π_u , respectivamente.

Assumindo que será mantida a viabilidade das aproximações da solução durante o processo iterativo, isto é, as parcelas $(z - \mathbf{s}_l - l)$ e $(z + \mathbf{s}_u - u)$ são nulas, de (5.70) e (5.71), obtem-se

$$\Delta \mathbf{s}_l^k = \Delta \mathbf{z}^k \quad (5.73)$$

$$\Delta \mathbf{s}_u^k = -\Delta \mathbf{z}^k \quad (5.74)$$

Substituindo essas equações (5.68) e (5.69), obtem-se

$$\Delta \pi_l = -\mathbf{S}_l^{-1} (\mu \mathbf{e} - \mathbf{S}_l \pi_l - \Pi_l \Delta \mathbf{z}) \quad (5.75)$$

$$\Delta \pi_u = -\mathbf{S}_u^{-1} (\mu \mathbf{e} - \mathbf{S}_u \pi_u - \Pi_u \Delta \mathbf{z}) \quad (5.76)$$

Portanto, os acréscimos $\Delta \mathbf{s}_l^k$, $\Delta \mathbf{s}_u^k$, $\Delta \pi_l^k$, e $\Delta \pi_u^k$ podem ser expressos em função de $\Delta \mathbf{z}^k$ e $\Delta \lambda^k$. Desta forma, o sistema de equações (5.66) a (5.66) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{J}^T \\ -\mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z}^k \\ \Delta \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}^k \\ \mathbf{g}(\mathbf{z}^k) \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

onde

$$\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{z}^k) + \lambda^T \nabla^2 \mathbf{g}(\mathbf{z}^k) + \mathbf{S}_l^{-1} \pi_l - \mathbf{S}_p^{-1} \pi_p$$

$$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{z}^k)$$

Uma vez calculados $\Delta \mathbf{z}^k$ e $\Delta \lambda^k$, os acréscimos nas demais variáveis podem ser obtidos a partir de (5.73) a (5.76).

Após a solução de (5.77), uma nova aproximação das variáveis é calculada por

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \alpha_p \Delta \mathbf{z}^k \quad (5.78)$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha_d \Delta \lambda^k \quad (5.79)$$

$$\pi_l^{k+1} = \pi_l^k + \alpha_d \Delta \pi_l^k \quad (5.80)$$

$$\pi_u^{k+1} = \pi_u^k + \alpha_d \Delta \pi_u^k \quad (5.81)$$

$$\mathbf{s}_l^{k+1} = \mathbf{s}_l^k + \alpha_p \Delta \mathbf{s}_l^k \quad (5.82)$$

$$\mathbf{s}_u^{k+1} = \mathbf{s}_u^k + \alpha_p \Delta \mathbf{s}_u^k \quad (5.83)$$

onde α_p e α_d são escolhidos de maneira a preservar a viabilidade (satisfação das restrições) da solução. Isto é alcançado escolhendo-se α_p e α_d de acordo com [16]

$$\alpha_p = \min\left\{1, \sigma \left(\min_{\Delta s_{lj} > 0} \frac{s_{lj}}{|\Delta s_{lj}|}, \min_{\Delta s_{uj} > 0} \frac{s_{uj}}{|\Delta s_{uj}|} \right)\right\} \quad (5.84)$$

$$\alpha_d = \min\left\{1, \sigma \left(\min_{\Delta \pi_{lj} > 0} \frac{\pi_{lj}}{|\Delta \pi_{lj}|}, \min_{\Delta \pi_{uj} > 0} \frac{\pi_{uj}}{|\Delta \pi_{uj}|} \right)\right\} \quad (5.85)$$

onde $0 < \sigma < 1$. É possível, também, implementar o método com $\alpha_p = \alpha_d$.

Problemas

1. Apresente uma representação geométrica (curvas de nível) para os seguintes problemas de otimização. Se possível, indique a solução desses problemas.

$$\begin{array}{ll} \min f(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 & \min f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \\ \text{s. a} & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{s. a} & x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

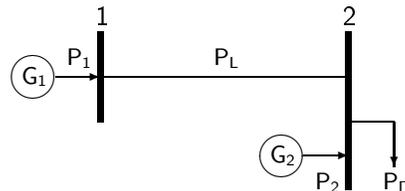
2. Usando as condições de Karush-Kuhn-Tucker, encontre o(s) valor(es) de β para os quais o ponto $x^* = [1 \ 2]^T$ será a solução do problema abaixo

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) = 2x_1 + \beta x_2 \\ \text{s. a} & x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

3. O diagrama da figura abaixo representa o equivalente de dois sistemas interligados onde o atendimento à carga no sistema 2 pode ser realizado por geração própria e importação de energia do sistema 1. Supondo o valor das perdas na transmissão dado pela fórmula abaixo (P_L), pede-se:

- Formular o problema de despacho econômico (custo mínimo de geração) no formato padrão de um problema de Programação Não-Linear;
- Resolver o problema formulado em (a) através do estabelecimento das condições necessárias de otimalidade e solução do respectivo sistema de equações/inequações. Considere o caso com e sem restrições de desigualdade (limites);
- Idêntico ao item (b), porém usando o método do Gradiente;
- Idêntico ao item (b), porém usando o método de Newton.

$$\begin{array}{l} C_1(P_1) = 250 + 5,6P_1 + 0,001P_1^2 \quad \$/h \\ C_2(P_2) = 350 + 6,2P_2 + 0,002P_2^2 \quad \$/h \\ P_L = 0,0001P_1^2 \\ P_D = 300\text{MW} \\ 0 \leq P_1, P_2 \leq 200\text{MW} \end{array}$$



Capítulo 6

Avaliação Estática da Estabilidade de Tensão

6.1 Introdução

Modificações estruturais no setor elétrico, tais como aquelas causadas pelas privatizações e reestruturação do setor, assim como a disponibilidade de dispositivos rápidos de controle e compensação de reativos, têm levado os sistemas elétricos de potência a operar próximos à sua capacidade máxima de transmissão. Em decorrência dessa prática operativa, a estabilidade de tensão tornou-se aspecto importante, senão decisivo, na determinação dos limites máximos de transferência de potência entre regiões, superando, em muitos casos, aqueles impostos pela estabilidade angular [26, 18].

A estabilidade de tensão está associada à capacidade do sistema de potência em manter um perfil de tensões adequado, tanto em condições normais de operação quanto no caso de ocorrência de perturbações severas. Caso essa condição não seja satisfeita, ocorrerá o fenômeno da *instabilidade de tensão*, caracterizado por uma redução progressiva e incontrolável da magnitude da tensão em uma ou mais barras do sistema, podendo, caso não sejam tomadas medidas corretivas, estender-se a regiões vizinhas, resultando em um colapso parcial ou total do sistema.

A instabilidade de tensão está fortemente associada à deficiência no suporte de reativos e limitações na capacidade de transmissão do sistema. Essa deficiência se manifesta, por exemplo, em uma situação na qual os principais troncos de transmissão encontram-se operando próximos aos seus limites de máxima transferência e as reservas de geração de potência reativa nos centros de carga estão praticamente esgotadas.

O fenômeno da instabilidade de tensão pode ser iniciado de duas maneiras:

- *Grandes perturbações* no sistema provocadas, por exemplo, por curto-circuitos, desligamentos de linhas de transmissão, etc. Neste caso, a instabilidade de tensão pode se manifestar imediatamente (poucos

segundos) após a perturbação, de forma similar ao problema de instabilidade angular (instabilidade de tensão transitória), ou decorrido algum tempo (vários minutos) após a perturbação, através da degradação lenta do perfil de tensões (instabilidade de tensão de médio e longo prazos).

- *Pequenas perturbações* causadas pela variação normal da carga. Este tipo de fenômeno é normalmente tratado através de uma análise estática ou em regime permanente.

A instabilidade de tensão transitória é influenciada fortemente por componentes da carga com dinâmica rápida (motores de indução, por exemplo) e dispositivos rápidos de controle de tensão. No caso da instabilidade de tensão de médio e longo prazos, os principais responsáveis pelo fenômeno são os transformadores com comutação automática de tap sob carga (LTC), os limitadores de sobreexcitação dos geradores (OEL), e outros dispositivos de controle lentos.

Os métodos de avaliação da estabilidade de tensão podem ser divididos em duas categorias: estáticos e dinâmicos. Os métodos estáticos baseiam-se na análise de sistemas de equações algébricas obtidas a partir do modelo de fluxo de potência em sua versão convencional ou modificada. Os métodos dinâmicos, em geral, baseiam-se em soluções no tempo de sistemas de equações diferenciais e algébricas representando o desempenho dinâmico dos componentes do sistema. Embora o fenômeno da instabilidade de tensão seja essencialmente dinâmico, os métodos estáticos são importantes pela sua eficiência computacional e pelas informações que produzem com relação a sensibilidades, graus de instabilidade e margens de estabilidade. Os métodos de simulação, por sua vez, reproduzem de forma mais precisa o comportamento do sistema e são a única forma de se determinar a cronologia dos eventos que, eventualmente, conduzem a uma situação de instabilidade.

Os métodos dinâmicos são indispensáveis no estudo da instabilidade de tensão transitória pois somente com esse tipo de método é possível representar, de forma precisa, o comportamento dos componentes do sistema com resposta rápida. Os métodos estáticos são adequados para os estudos relacionados à instabilidade causada por pequenas perturbações, nos quais o objetivo principal é a determinação dos limites máximos de transferência de potência e reforços no suporte de reativos visando aumentar esses limites. A instabilidade de tensão de médio e longo prazos deve ser estudada por métodos dinâmicos, devido à necessidade da representação da cronologia dos eventos, porém não exige, necessariamente, uma representação precisa dos efeitos transitórios mais rápidos. Métodos baseados em modelos simplificados da dinâmica do sistema, levando em consideração apenas os aspectos relevantes à avaliação da estabilidade de tensão, têm sido utilizados com sucesso nesse tipo de estudo [9].

6.2 Características P-V e P-Q

Um forma usual de se introduzir os conceitos básicos associados à avaliação estática da estabilidade de tensão é através da análise das características P-V e P-Q de um sistema radial simples como aquele mostrado na Figura 6.1.

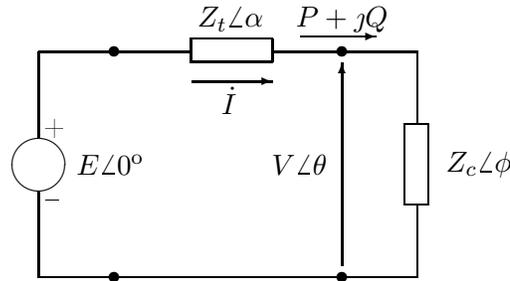


Figura 6.1: Sistema radial simples

A corrente no circuito da Figura 6.1 é dada por

$$\dot{I} = \frac{E\angle 0^\circ}{Z_t\angle\alpha + Z_c\angle\phi} \quad (6.1)$$

ou

$$\dot{I} = \frac{E\angle 0^\circ}{Z_t(\cos\alpha + j\sin\alpha) + Z_c(\cos\phi + j\sin\phi)} \quad (6.2)$$

de onde se obtém a magnitude da corrente

$$I = \frac{E}{[(Z_t \cos\alpha + Z_c \cos\phi)^2 + (Z_t \sin\alpha + Z_c \sin\phi)^2]^{1/2}} \quad (6.3)$$

Definindo,

$$\kappa = \frac{Z_c}{Z_t} \quad (6.4)$$

vem

$$I = \frac{E}{Z_t\sqrt{\rho}} \quad (6.5)$$

onde

$$\rho = 1 + \kappa^2 + 2\kappa \cos(\alpha - \phi) \quad (6.6)$$

A tensão na carga é dada por

$$V = Z_c I = \frac{EZ_c}{Z_t\sqrt{\rho}} \quad (6.7)$$

ou ainda

$$V = \frac{\kappa E}{\sqrt{\rho}} \quad (6.8)$$

As potências ativa e reativa fornecidas à carga valem

$$P = VI \cos \phi \quad \text{e} \quad Q = VI \sin \phi \quad (6.9)$$

as quais, mediante a substituição de (6.5) e (6.8), produzem

$$P = \frac{\kappa E^2 \cos \phi}{Z_t \rho} \quad \text{e} \quad Q = \frac{\kappa E^2 \sin \phi}{Z_t \rho} \quad (6.10)$$

Os valores da corrente, tensão na carga, potência ativa e reativa podem, ainda, ser normalizados pela corrente de curto-circuito ($I_{cc} = E/Z_t$), tensão da fonte (E) e potência máxima transferida ($P_{max} = E^2/2Z_t$), como a seguir

$$\frac{I}{I_{cc}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad ; \quad \frac{V}{E} = \frac{\kappa}{\sqrt{\rho}} \quad (6.11)$$

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{2\kappa \cos \phi}{\rho} \quad ; \quad \frac{Q}{P_{max}} = \frac{2\kappa \sin \phi}{\rho} \quad (6.12)$$

Assumindo os valores $\tan \alpha = 10$ e $\cos \phi = 0.95$ (atrasado) para o circuito da Figura 6.1, obtem-se as curvas mostradas na Figura 6.2. As curvas de potência ativa e reativa podem, ainda, ser normalizadas com relação à máxima potência ativa encontrada na característica, isto é, P/P_{max} , resultando nas curvas mostradas na Figura 6.3.

Das Figuras 6.2 e 6.3, pode-se observar que as potências máximas transferidas à carga ocorrem quando $\kappa = 1$ ($Z_t = Z_c$). Para valores de $\kappa > 1$ ($Z_c > Z_t$), as potências transferidas aumentam com a elevação da carga (redução de Z_c). Por outro lado, para $\kappa < 1$ ($Z_c < Z_t$), a elevação da carga produz uma redução nas potências transferidas. A segunda hipótese é, claramente, uma situação instável.

Dois curvas características muito importantes no estudo da estabilidade de tensão são as características P-V e P-Q. A característica P-V relaciona a tensão na barra de carga (V/E) com o valor da potência ativa consumida pela carga (P/P_{max}), para diferentes valores de κ . Essa curva pode ser obtida da Figura 6.3 para pares de valores da tensão e potência ativa.

Para o circuito simples analisado nesta seção, a característica P-V é dada na Figura 6.4. Nessa figura o limite de transferência de potência (ponto crítico), correspondente à tensão de 0,6 pu, determina a condição limite de estabilidade de tensão. A parte superior da característica P-V mostra que o aumento da potência ativa transferida à carga causa uma redução na tensão. Por outro lado, na parte inferior da curva ocorre o efeito contrário, caracterizando uma situação de instabilidade.

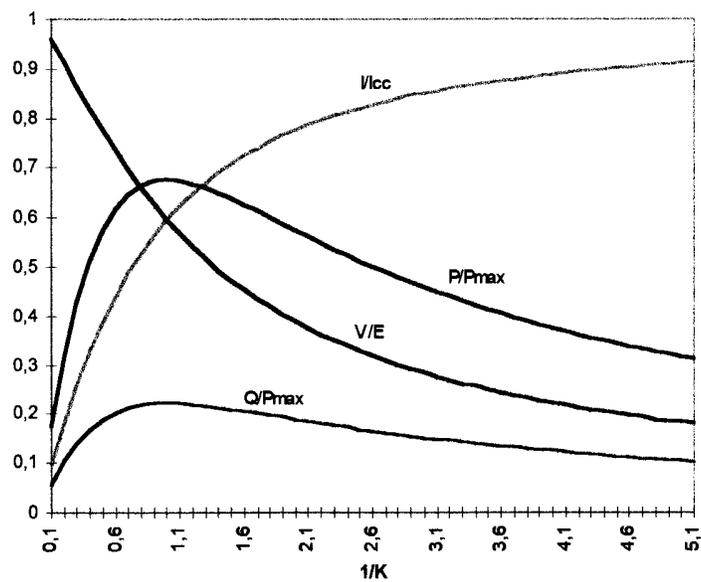


Figura 6.2: Características da corrente, da tensão e das potências em função da carga.

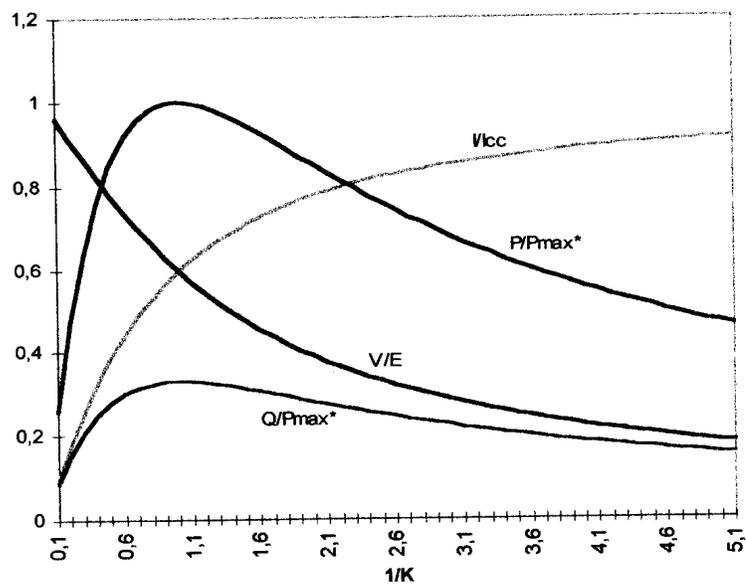


Figura 6.3: Características da corrente, da tensão e das potências em função da carga (com nova normalização).

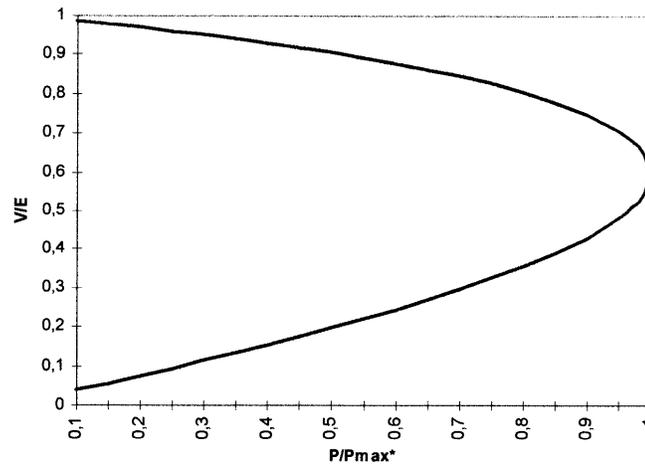


Figura 6.4: Característica P-V.

A característica Q-V do circuito analisado nesta seção, correspondente à condição de carga ativa $P/P_{max} = 0,67$, é dada na Figura 6.5. Nessa figura, a potência reativa Q corresponde à potência entregue à carga, ou seja, é o valor negativo da potência reativa consumida pela carga. Para condições de operação na parte à esquerda da característica Q-V, um aumento da potência reativa injetada na barra produz redução da tensão. Essa região corresponde, portanto, a condições instáveis de operação.

A Figura 6.6 mostra a influência da falha de um componente (contingência) do sistema de transmissão na característica P-V. Supondo que Z_t representa a impedância equivalente do sistema de transmissão que conecta a geração à carga, o desligamento de um componente desse sistema tem o efeito de aumentar o valor de Z_t . Esse fato ocasiona uma redução no limite de transferência de potência como mostrado pela curva P-V para a situação pós-contingência.

Os modelo das cargas têm uma influência importante na avaliação da estabilidade de tensão. Para ilustrar essa influência, suponha que no exemplo desta seção a carga ativa seja representada por parcelas do tipo impedância constante e potência constante, ou seja, a carga ativa é dada por

$$P = P_0(a + b V^2) \quad (6.13)$$

Suponha três situações particulares típicas de representação de cargas em sistemas reais:

- Carga Tipo 1: $a = 0.25$ e $b = 0.75$;
- Carga Tipo 2: $a = 0.75$ e $b = 0.25$;

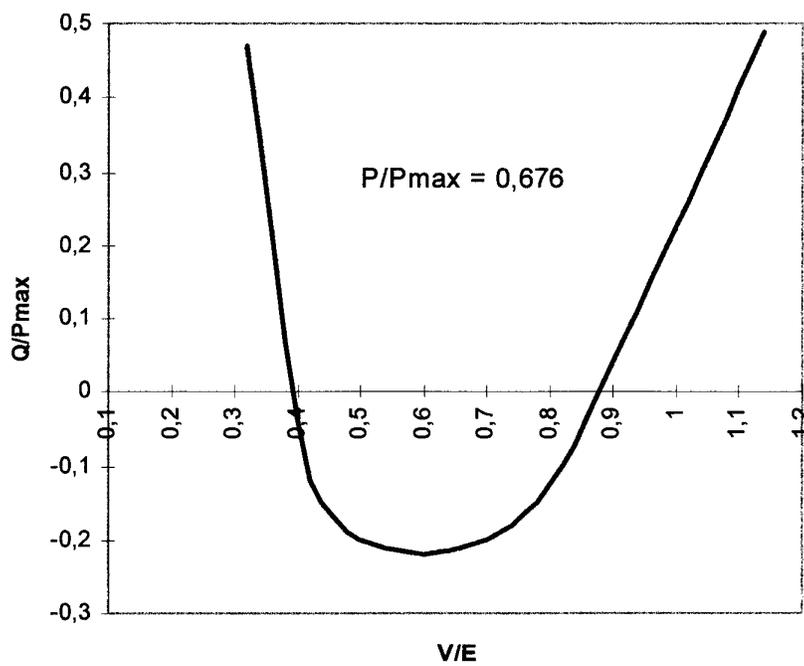


Figura 6.5: Característica Q-V.

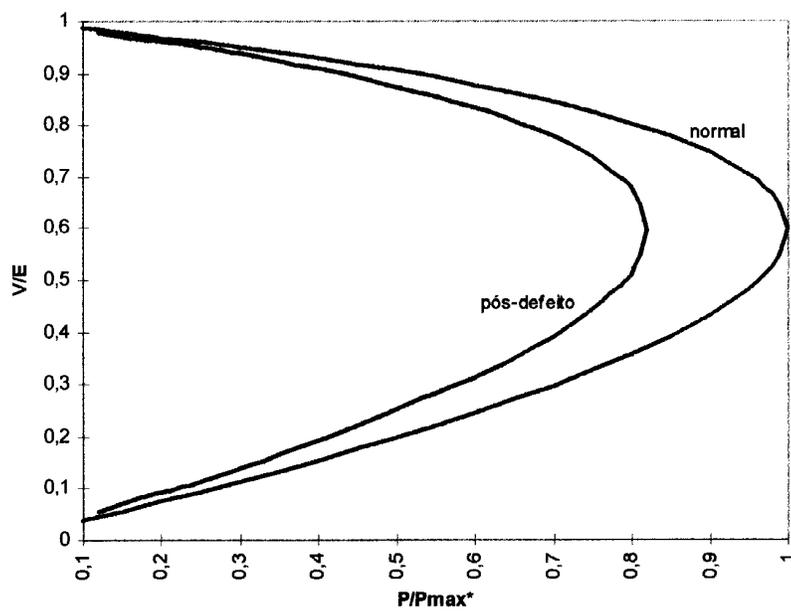


Figura 6.6: Características P-V para as condições normal e pós-defeito.

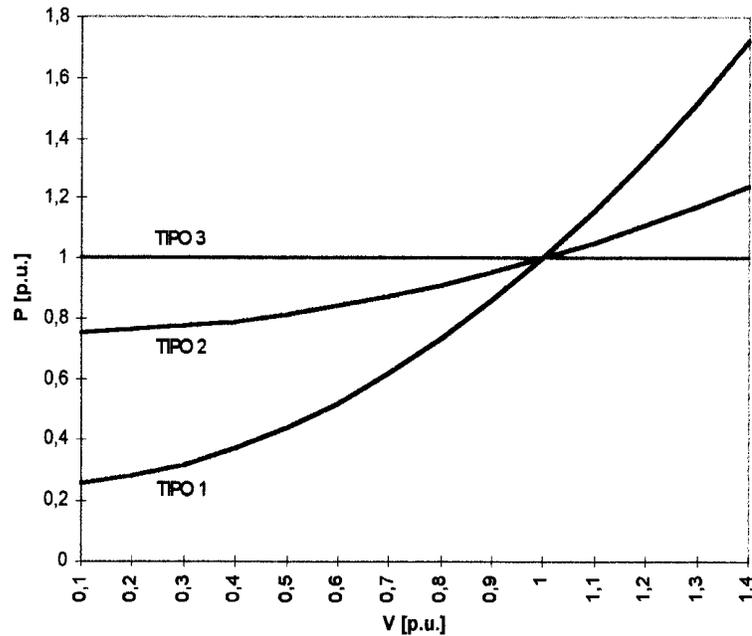


Figura 6.7: Características das cargas.

- Carga Tipo 3: $a = 1.00$ e $b = 0$.

As características P-V desses três modelos de carga são mostradas na Figura 6.7.

A interação dos modelos de carga acima descritos com o sistema de transmissão é mostrada na Figura 6.8. Nessa figura pode-se observar que para a carga do tipo 3 (potência constante), o sistema opera em condições limites quando se considera o regime normal de operação (ponto a) e apresenta-se instável para a condição operativa pós-contingência (não há interseção entre as características da carga e da configuração pós-contingência). Por outro lado, se o sistema estiver operando com uma carga do tipo 2, o mesmo apresenta-se estável para a condição normal (ponto b) e condição limite de operação para a condição pós-contingência (ponto c). Finalmente, para uma carga do tipo 1, o sistema apresenta-se estável tanto para a condição normal (ponto d) quanto na configuração pós-contingência (ponto e), estando mais próximo, entretanto, do ponto de colapso nessa última configuração.

A Figura 6.9 mostra a influência do fator de potência da carga na característica P-V. Dessa figura pode-se concluir que quanto mais elevado é o fator de potência, maior será o limite de potência que pode ser transferido do gerador à carga e mais elevado será a tensão correspondente ao ponto crítico. Portanto, o colapso de tensão pode acontecer com magnitudes de tensão consideradas normais ($> 0,95 pu$) quando as barras de carga

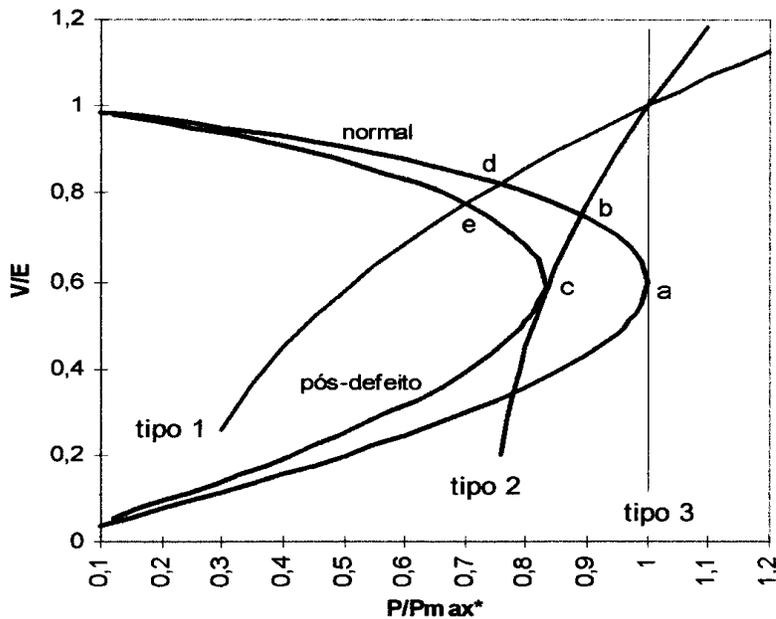


Figura 6.8: Característica composta carga/sistema de transmissão.

apresentarem fatores de potência elevados, ou até adiantados, devido, por exemplo, à utilização de capacitores *shunt* para compensação reativa.

No caso de redes com múltiplos geradores e cargas, as características P-V e Q-V podem ser obtidas resolvendo-se uma seqüência de casos de fluxo de potência para crescentes níveis de carga. A partir dos resultados desses casos de fluxo de potência, pode-se construir as curvas P-V e Q-V para as barras de carga do sistema e determinar a aproximação do ponto de máxima transferência de potência. Esse ponto é determinado pela primeira curva que atingir o ponto crítico e a barra correspondente a essa curva é denominada barra crítica.

6.3 Análise de Sensibilidade Q-V e P-V

Conclusões importante relativas à estabilidade de tensão de um sistema de potência podem ser obtidas a partir de uma análise de sensibilidade das variações nos módulos das tensões nas barras de carga em relação às variações nas injeções de potência ativa e reativa. Essa análise pode ser realizada a partir do modelo linearizado das equações do fluxo de potência vistas no Capítulo 3 (equação 3.39) e reproduzidas a seguir com a notação ligeiramente modificada

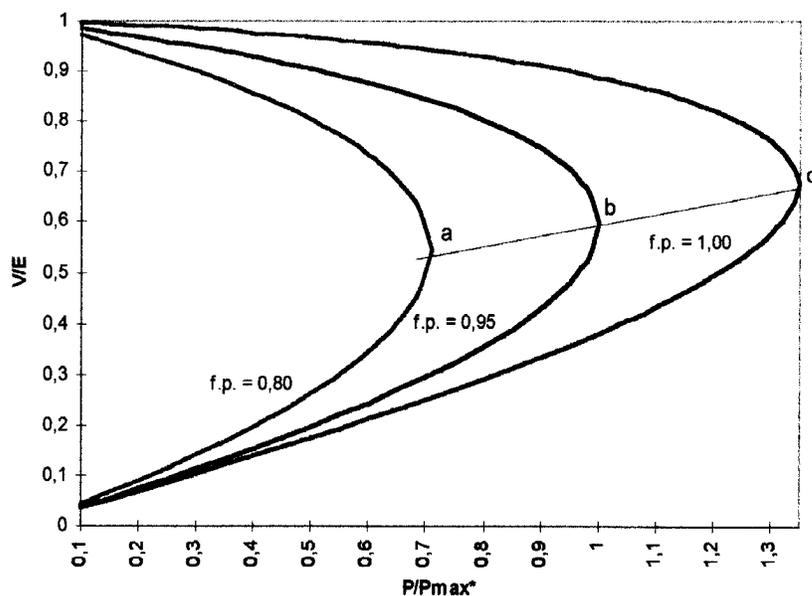


Figura 6.9: Características P-V para diversos fatores de potência da carga.

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P\theta} & \mathbf{J}_{PV} \\ \mathbf{J}_{Q\theta} & \mathbf{J}_{QV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

onde $\mathbf{J}_{P\theta}$, \mathbf{J}_{PV} , $\mathbf{J}_{Q\theta}$ e \mathbf{J}_{QV} são submatrizes do Jacobiano.

Supondo, inicialmente, $\Delta \mathbf{P} = 0$, ou seja, que existe somente variações na demanda de potência reativa ($\Delta \mathbf{Q} \neq 0$), temos

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_{P\theta} \Delta \theta + \mathbf{J}_{PV} \Delta \mathbf{V} \quad (6.15)$$

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{J}_{Q\theta} \Delta \theta + \mathbf{J}_{QV} \Delta \mathbf{V} \quad (6.16)$$

de onde obtemos

$$\Delta \mathbf{Q} = [\mathbf{J}_{QV} - \mathbf{J}_{Q\theta} \mathbf{J}_{P\theta}^{-1} \mathbf{J}_{PV}] \Delta \mathbf{V} \quad (6.17)$$

ou

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{J}_{RQ} \Delta \mathbf{V} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{J}_{RQ} = \mathbf{J}_{QV} - \mathbf{J}_{Q\theta} \mathbf{J}_{P\theta}^{-1} \mathbf{J}_{PV} \quad (6.19)$$

onde \mathbf{J}_{RQ} é *Matriz de Sensibilidade Q-V*.

Analogamente, pode-se supor $\Delta \mathbf{Q} = 0$, ou seja, que existe somente variações na demanda de potência ativa ($\Delta \mathbf{P} \neq 0$), e obter

$$\Delta \mathbf{P} = [\mathbf{J}_{PV} - \mathbf{J}_{P\theta} \mathbf{J}_{Q\theta}^{-1} \mathbf{J}_{QV}] \Delta \mathbf{V} \quad (6.20)$$

ou

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{J}_{RP} \Delta \mathbf{V} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{J}_{RP} = \mathbf{J}_{PV} - \mathbf{J}_{P\theta} \mathbf{J}_{Q\theta}^{-1} \mathbf{J}_{QV} \quad (6.22)$$

onde \mathbf{J}_{RP} é a *Matriz de Sensibilidade P-V*.

As matrizes \mathbf{J}_{RQ} e \mathbf{J}_{RP} podem ser vistas como equivalentes multidimensionais das inclinações das curvas Q-V e P-V, respectivamente, no ponto de operação considerado. Outra propriedade importante dessas matrizes é que elas se tornam singulares, assim como a matriz Jacobiano na equação (6.14), quando o sistema atinge o seu limite de máximo carregamento (ponto crítico).

6.4 Análise Modal

A Matriz de Sensibilidade Q-V pode ser decomposta na forma

$$\mathbf{J}_{RQ} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{W} \quad (6.23)$$

onde $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ é matriz diagonal dos autovalores de \mathbf{J}_{RQ} , enquanto que $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n]^T$ e $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n]$ são, respectivamente, as matrizes dos seus autovetores à esquerda e à direita.

Como é sempre possível normalizar os autovetores de forma que $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{W}$, substituindo (6.23) em (6.18) e invertendo, temos

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{U} \Lambda^{-1} \mathbf{W} \Delta \mathbf{Q} \quad (6.24)$$

ou

$$\Delta \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i \mathbf{w}_i^T}{\lambda_i} \Delta \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{P}_i}{\lambda_i} \Delta \mathbf{Q} \quad (6.25)$$

onde \mathbf{P}_i é definida como a matriz dos *Fatores de Participação* associados ao i -ésimo modo (λ_i).

De (6.24), obtem-se

$$\mathbf{W} \Delta \mathbf{V} = \Lambda^{-1} \mathbf{W} \Delta \mathbf{Q} \quad (6.26)$$

ou

$$\mathbf{v} = \Lambda^{-1} \mathbf{q} \quad (6.27)$$

com

$$\mathbf{v} = \mathbf{W} \Delta \mathbf{V}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{W} \Delta \mathbf{Q} \quad (6.28)$$

onde \mathbf{v} e \mathbf{q} são, respectivamente, os vetores de variação modal da tensão e da potência reativa.

Para o i -ésimo modo, temos

$$v_i = \frac{1}{\lambda_i} q_i \quad (6.29)$$

Se $\Re(\lambda_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, os i -ésimos componentes dos vetores da tensão modal e da potência reativa modal estarão na mesma direção, indicando que o sistema é *estável*. Em caso contrário, se para algum i , $\Re(\lambda_i) < 0$, o sistema é *instável*. O ponto crítico é caracterizado por algum $\Re(\lambda_i) = 0$ pois, nesse caso, qualquer variação na injeção de potência reativa causa uma variação infinita na tensão.

A matriz de sensibilidade Q-V apresenta, para os sistemas de potência reais, um alto grau de simetria, fazendo com que os seus autovalores e autovetores sejam, em geral, reais.

6.5 Fluxo de Potência Continuado

Os métodos convencionais de solução do problema de fluxo de potência, tais como os métodos de Newton-Raphson e Desacoplado Rápido descritos anteriormente, em sua formulação básica, apresentam dificuldades de convergência quando o sistema de transmissão aproxima-se de um ponto de máxima transferência de potência (ponto crítico). Em muitas situações, por exemplo na análise de estabilidade de tensão, pode se tornar necessário a obtenção de soluções do fluxo de potência muito próximas ao ponto crítico ou mesmo além do ponto crítico, ou seja, na parte inferior da curva P-V.

Existem vários métodos para resolver o problema descrito acima. Entre os mais conhecidos encontra-se o chamado Fluxo de Potência Continuado (*Continuation Power Flow*) descrito em [1], [6] e [18, pp. 1012–1018]. Este método é capaz de produzir uma sequência de soluções do problema de fluxo de potência para um dado cenário de variação de carga. O método utiliza um esquema de previsão-correção para encontrar uma trajetória de soluções do sistema de equações definindo o problema de fluxo de potência, reformulado para incluir um parâmetro representando a variação da carga. A idéia básica do método é ilustrado na Figura 6.10.

6.5.1 Reformulação das Equações do Fluxo de Potência

A variação da carga ativa e reativa nas barras do sistema é representada pela variação de um único parâmetro λ da forma seguinte:

$$P_{Lk} = P_{Lk}^0 + \lambda [\gamma_k S \cos\psi_k] \quad (6.30)$$

$$Q_{Lk} = Q_{Lk}^0 + \lambda [\gamma_k S \sin\psi_k] \quad (6.31)$$

onde

P_{Lk}^0, Q_{Lk}^0 : carga ativa e reativa inicial na barra k ;

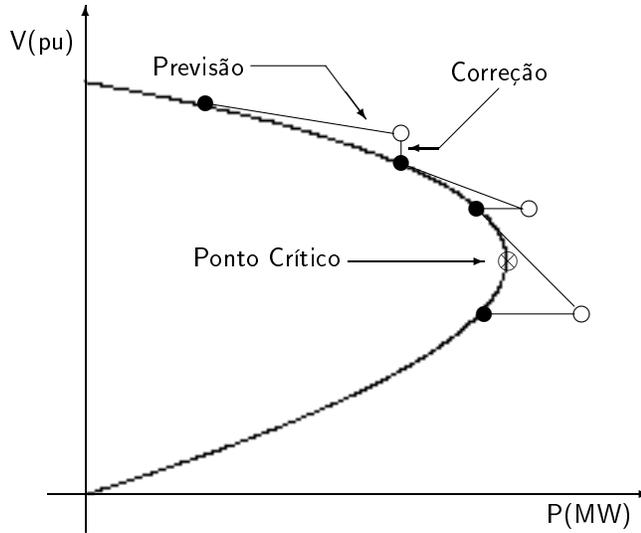


Figura 6.10: Ilustração do esquema de previsão-correção do Fluxo de Potência Continuado

γ_k : fator de variação da carga na barra k ;

ψ_k : fator de variação do fator de potência na barra k ;

S : valor arbitrário de potência aparente (MVAR) usado como referência para o escalamento do parâmetro λ .

Uma versão simplificada das expressões acima, supondo um crescimento uniforme da carga com fator de potência constante, é dada por

$$P_{Lk} = P_{Lk}^0(1 + \lambda) \quad (6.32)$$

$$Q_{Lk} = Q_{Lk}^0(1 + \lambda) \quad (6.33)$$

Para acompanhar o crescimento da carga, a geração de potência ativa deve ser também ajustada de acordo com a expressão

$$P_{Gk} = P_{Gk}^0(1 + \lambda\beta_k) \quad (6.34)$$

onde

P_{Gk}^0 : geração ativa inicial na barra k ;

β_k : fator de variação da geração na barra k .

O Subsistema I de equações do fluxo de potência passa, então, a ser escrito na forma seguinte

$$P_{Gk}^0(1 + \lambda\beta_k) - P_{Lk}^0 - \lambda [\gamma_k S \cos\psi_k] - g_{pk}(\Theta, \mathbf{V}) = 0, \quad k \in \{PV, PQ\} \quad (6.35)$$

$$Q_{Gk}^0 - Q_{Lk}^0 - \lambda [\gamma_k S \text{sen}\psi_k] - g_{qk}(\Theta, \mathbf{V}) = 0, \quad k \in \{PV, PQ\} \quad (6.36)$$

onde

$$\begin{aligned} g_{p_k}(\Theta, \mathbf{V}) &= V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \cos\theta_{km} + B_{km} \text{sen}\theta_{km}) \\ g_{q_k}(\Theta, \mathbf{V}) &= V_k \sum_{m \in \Omega_k} V_m (G_{km} \text{sen}\theta_{km} - B_{km} \cos\theta_{km}) \end{aligned}$$

As equações (6.35) e (6.36) podem ser colocadas na forma compacta

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.37)$$

onde $\mathbf{x} = [\Theta^T \mathbf{V}^T \lambda]^T$ e $0 \leq \lambda \leq \lambda_{critico}$. No caso de $\lambda = 0$, essas equações se reduzem às equações usuais do fluxo de potência.

6.5.2 Etapa de Previsão

A partir da solução do caso base, uma previsão da próxima solução pode ser obtida *caminhando-se* um certo *passo* na direção da tangente à curva. O vetor tangente é obtido tomando-se a diferencial total de ambos os lados de (6.37)

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial(\Theta)} d\theta + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{V})} d\mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial(\lambda)} d\lambda = 0 \quad (6.38)$$

ou

$$\left[\begin{array}{cc|c} F_{\Theta} & F_{\mathbf{V}} & F_{\lambda} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} d\Theta \\ d\mathbf{V} \\ d\lambda \end{array} \right] = \mathbf{0} \quad (6.39)$$

onde

$$F_{\theta} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial(\Theta)}; \quad F_{\mathbf{V}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial(\mathbf{V})}; \quad F_{\lambda} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial(\lambda)}.$$

Note que a partição $[F_{\Theta} \ F_{\mathbf{V}}]$ em (6.39) é o Jacobiano do método de Newton-Raphson.

O sistema de equações (6.39) tem uma incógnita a mais que o número de equações. Para resolver esse sistema, é necessário que uma das incógnitas tenha seu valor especificado (por exemplo, no valor ± 1). Esta variável recebe o nome de *Parâmetro de Continuação*. Neste caso, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} F_{\Theta} & F_{\mathbf{V}} & F_{\lambda} \\ & \mathbf{e}_k & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} d\Theta \\ d\mathbf{V} \\ d\lambda \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \pm 1 \end{array} \right] \quad (6.40)$$

onde

$$\mathbf{e}_k = [0 \ \dots \ 0 \ \overset{k}{1} \ 0 \ \dots \ 0]$$

O parâmetro de continuação deve ser escolhido de maneira tal que tenha a maior taxa de variação próximo à solução em questão. Duas situações devem ser observadas:

- Próximo ao caso base (carga normal): variações relativamente grandes na carga (λ) produzem pequenas variações nas componentes de Θ e \mathbf{V} . Neste caso, λ deve ser escolhido como parâmetro de continuação.
- Próximo ao ponto crítico (carga pesada): pequenas variações na carga (λ) produzem grandes variações em algumas componentes de Θ e \mathbf{V} . Neste caso, a componente de θ ou \mathbf{v} com maior taxa de variação deve ser escolhida como parâmetro de continuação.

Uma vez calculado o vetor tangente, a previsão da solução é calculada por

$$\begin{bmatrix} \Theta^{p+1} \\ \mathbf{V}^{p+1} \\ \lambda^{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta^p \\ \mathbf{V}^p \\ \lambda^p \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} d\Theta \\ d\mathbf{V} \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

onde σ define o passo a ser dado na direção do vetor tangente e p é o contador de passos do processo de continuação. A escolha de σ afeta bastante o desempenho do método. Se σ for pequeno, o número de passos necessários para se alcançar a solução desejada é muito grande e, conseqüentemente, o tempo de computação muito elevado. Se σ for demasiadamente grande, a etapa de correção pode não convergir.

6.5.3 Etapa de Correção

Nesta etapa do processo, o sistema de equações definido em (6.37) é aumentado de uma equação que define o valor da variável escolhida como parâmetro de continuação na etapa de previsão. O valor atribuído a esta variável é igual ao valor previsto para a mesma, de acordo com (6.41). O novo conjunto de equações tem o seguinte aspecto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}(\Theta, \mathbf{V}, \lambda) \\ x_k - \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

onde k é o índice da variável escolhida como parâmetro de continuação e η é o valor calculado para esta variável na etapa de previsão.

O sistema de equações definido em (6.42) pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson com uma implementação muito semelhante ao caso do fluxo de potência convencional.

Exemplo 6.1 *Seja o sistema simples mostrado na Figura 6.11 onde a barra 1 é uma barra infinita (módulo e ângulo de fase da tensão constantes).*

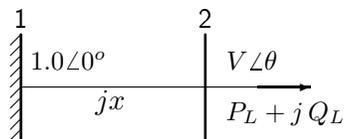


Figura 6.11: Sistema para exemplo do Método de Continuação

1. *Variação da carga:*

$$\begin{aligned} P_L &= P_L^0(1 + \lambda) \\ Q_L &= Q_L^0(1 + \lambda) \end{aligned}$$

2. *Equações do fluxo de potência incluindo o parâmetro λ*

$$\begin{aligned} g_p(\theta, V, \lambda) &= -P_L^0(1 + \lambda) - VB_{21}\sin\theta = 0 \\ g_q(\theta, V, \lambda) &= -Q_L^0(1 + \lambda) - V^2B_{22} + VB_{21}\cos\theta = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

onde $\mathbf{x} = [\theta \ V \ \lambda]^T$.

3. *Vetor tangente*

De (6.39), obtemos para este caso particular

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \theta} & \frac{\partial f_p}{\partial V} & \frac{\partial f_p}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q}{\partial V} & \frac{\partial f_q}{\partial \lambda} \end{bmatrix}_{\theta^p, V^p, \lambda^p} \begin{bmatrix} d\theta^p \\ dV^p \\ d\lambda^p \end{bmatrix} = 0$$

O sistema de equações acima tem 2 equações e 3 incógnitas. Uma terceira equação pode ser acrescentada ao sistema fazendo-se $d\lambda = \pm 1$. O sinal na expressão anterior depende do fato de λ estar crescendo (+) ou decrescendo (-). Assim, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \theta} & \frac{\partial f_p}{\partial V} & \frac{\partial f_p}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q}{\partial V} & \frac{\partial f_q}{\partial \lambda} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\theta^p, V^p, \lambda^p} \begin{bmatrix} d\theta^p \\ dV^p \\ d\lambda^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

Quando estivermos próximos ao ponto crítico, devemos escolher outro parâmetro de continuação. Por exemplo, $V = \pm 1$. Neste caso, teremos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \theta} & \frac{\partial f_p}{\partial V} & \frac{\partial f_p}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q}{\partial V} & \frac{\partial f_q}{\partial \lambda} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\theta^p, V^p, \lambda^p} \begin{bmatrix} d\theta^p \\ dV^p \\ d\lambda^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ambos os casos acima podem ser escritos, de forma compacta, como

$$\begin{bmatrix} J'(\mathbf{x}^p) \\ \mathbf{e}_k \end{bmatrix} [d\mathbf{x}^p] = [\pm \mathbf{e}_k^T]$$

onde

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$J'(\mathbf{x}^p) = \begin{bmatrix} J(\mathbf{x}^p) & J_\lambda(\lambda^p) \end{bmatrix}$$

onde

$$J(\mathbf{x}^p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \theta} & \frac{\partial f_p}{\partial V} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \theta} & \frac{\partial f_q}{\partial V} \end{bmatrix}_{\theta^p, V^p}; \quad J_\lambda(\lambda^p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f_q}{\partial \lambda} \end{bmatrix}_{\lambda^p}.$$

Neste exemplo, as matrizes $J(\mathbf{x}^p)$ e $J_\lambda(\lambda^p)$ são dadas por

$$J(\mathbf{x}^p) = \begin{bmatrix} -V^p B_{21} \cos \theta^p & -B_{21} \sin \theta^p \\ -V^p B_{21} \sin \theta^p & -2V^p B_{22} + B_{21} \cos \theta^p \end{bmatrix}$$

$$J_\lambda(\lambda^p) = \begin{bmatrix} -P_{L0} \\ -Q_{L0} \end{bmatrix}$$

4. Etapa de Previsão

A previsão da solução no passo $p+1$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \theta^{p+1} \\ V^{p+1} \\ \lambda^{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^p \\ V^p \\ \lambda^p \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} d\theta^p \\ dV^p \\ d\lambda^p \end{bmatrix}$$

onde σ é o escalar que determina o passo a ser dado na direção escolhida.

5. Etapa de Correção

A etapa de correção consiste em resolver, pelo método de Newton-Raphson, o sistema de equações (6.42). Em cada iteração do processo de solução, o sistema linear a ser resolvido é

$$\begin{bmatrix} J'(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{V} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p(\theta, V, \lambda) \\ f_q(\theta, V, \lambda) \\ -(\bar{\lambda} - \lambda) \end{bmatrix}$$

no caso em que o parâmetro de continuação escolhido é λ , ou

$$\begin{bmatrix} J'(\mathbf{x}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{V} \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p(\theta, V, \lambda) \\ f_q(\theta, V, \lambda) \\ -(\bar{V} - V) \end{bmatrix}$$

no caso em que o parâmetro de continuação escolhido é V .

Apêndice A

Sistemas de Equações Algébricas Lineares

A.1 Introdução

Um dos problemas numéricos mais encontrados na análise de sistemas multivariáveis é a solução do conjunto de equações definido por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{A.1}$$

onde:

A : matriz real ou complexa ($n \times n$)

\mathbf{b} : vetor conhecido real ou complexo ($n \times 1$)

\mathbf{x} : vetor desconhecido ou procurado ($n \times 1$)

Com exceção de problemas com dimensões bastante reduzidas, o volume de cálculo necessário para resolver o problema acima é muito elevado para ser realizado sem a ajuda de computadores. Problemas com milhares, e até milhões, de equações são comuns na prática. Portanto, a eficiência computacional, em termos do número de operações aritméticas e memória necessários, é fator decisivo na escolha do método de solução.

O problema acima terá solução sempre que A for não-singular, isto é A^{-1} existir. Neste caso, se pelo menos uma das componentes de \mathbf{b} for diferente de zero a solução será única e dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{A.2}$$

Em certas situações, muito embora A seja não-singular, a obtenção da solução do sistema é difícil devido a problemas de precisão. Neste caso, o sistema de equações (ou matriz de coeficientes) é dito mal-condicionado. Este fato, bem como outros referidos acima, é ilustrado na figura A.1.

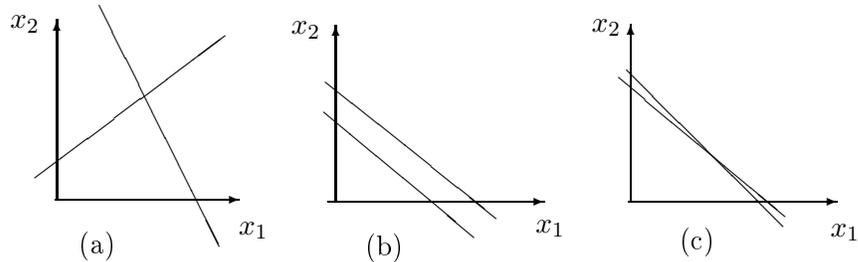


Figura A.1: Exemplos de sistemas de equações (a) bem condicionado, (b) sem solução e (c) mal condicionado

A.2 Métodos de Solução

Os métodos numéricos de solução de sistemas de equações algébricas podem ser classificados em três grupos:

1. Inversão Explícita: obtenção da inversa da matriz de coeficientes A e multiplicação pelo vetor \mathbf{b} .
2. Métodos Indiretos ou Iterativos: a solução é obtida através de aproximações sucessivas a partir de uma condição inicial arbitrária.
3. Métodos Diretos: o sistema original é transformado em um sistema equivalente de solução imediata através de operações elementares de linha e coluna na matriz de coeficientes e vetor de termos independentes.

A obtenção da inversa explícita de uma matriz é um processo numérico trabalhoso, envolvendo um número elevado de operações aritméticas ($\simeq N^3$ para uma matriz cheia $N \times N$). Em sistemas de grandes dimensões é possível a obtenção de resultados totalmente errados devido ao erro de arredondamento. Uma desvantagem adicional desse método, importante nos problemas de uma matriz esparsa pode resultar em uma matriz cheia.

Os métodos iterativos são facilmente implementáveis, apresentam requisitos de memória bastante modestos, são praticamente insensíveis à propagação de erros de arredondamento (os estágios iterativos são independentes) e, em geral, produzem a solução em um número de operações menor que a inversão explícita ($\simeq N^2$ para uma matriz cheia $N \times N$). Entretanto, apresentam grande desvantagem no caso de soluções repetidas (mesma matriz de coeficientes e diferentes vetores de termos independentes) pois exigem uma repetição total do processo iterativo em cada caso.

Os métodos diretos, muito embora de implementação mais difícil que os métodos indiretos, apresentam a grande vantagem de produzirem, ainda que implicitamente, a inversa da matriz de coeficientes. No caso de matrizes

esparsas, desde que habilmente programados, esses métodos podem se tornar tão eficientes quanto os métodos iterativos na solução de sistemas isolados e certamente, muito mais eficientes nas soluções repetidas ou quando também se deseja a solução de sistemas como $A^t \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $(A^t)^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, etc.

A.3 Métodos Diretos

Maiores detalhes sobre os assuntos tratados nesta seção podem ser encontrados nas referências [12, 15].

A.3.1 Eliminação de Gauss

O método Eliminação de Gauss (EG) será ilustrado através do seguinte sistema de equações genérico:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Assumindo que $a_{ii} \neq 0$, pode-se transformar o sistema de equações como a seguir:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j} \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (\text{A.5})$$

$$b_i^{(1)} = b_i - b_1 \frac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando-se o mesmo procedimento às $n - 1$ equações restantes, obtém-se o seguinte sistema triangularizado¹:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

¹O sobrescrito (n) indica que o respectivo coeficiente foi submetido a n operações no processo de EG.

```

Para  $k = 1, \dots, n - 1$ 
  Para  $i = k + 1, \dots, n$ 
     $l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ 
    Para  $j = k + 1, \dots, n$ 
       $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$ 
    Fim_para
     $b_i = b_i - l_{ik}b_k$ 
  Fim_para
Fim_para

```

Figura A.2: Algoritmo EG (Fase de Eliminação)

```

2Para  $k = n, n - 1, \dots, 1$ 
   $x_k = b_k$ 
  Para  $i = k + 1, \dots, n$ 
     $x_k = x_k - a_{ki}x_i$ 
  Fim_para
   $x_k = x_k / a_{kk}$ 
Fim_para

```

Figura A.3: Algoritmo EG (Fase de Substituição)

O sistema de equações triangularizado dado por (A.7) pode ser facilmente resolvido através de um processo de substituição inversa ou retro-substituição (*backward substitution*):

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \\
 x_{n-1} &= \frac{b_n^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}} \\
 &\vdots \\
 x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

O método EG, em suas duas fases (eliminação e substituição), encontra-se resumido nos algoritmos das Figuras A.2 e A.3.

²No segundo *loop* desse algoritmo, para $k = n$, a variável i apresenta uma variação

Exemplo A.1 *Suponha a solução do sistema de equações abaixo pelo método EG:*

$$\begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Após a fase de eliminação, o sistema apresenta o aspecto seguinte:

$$\begin{bmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & 0.5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

A solução dos sistema, obtida na fase de retrosubstituição, produz os valores $x_1 = 0.75$, $x_2 = 0.25$ e $x_3 = 0.625$.

O sistema triangularizado acima pode ser expresso de forma compacta como $U\mathbf{x} = \mathbf{b}'$. As operações realizadas na fase de eliminação podem ser sintetizadas na matriz triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que o produto LU reproduz a matriz de coeficientes do sistema original. Este resultado é válido para qualquer matriz não singular e servirá de base para o desenvolvimento de importante método de solução de sistemas de equações lineares a ser apresentado na próxima seção destas notas.

A.3.2 Fatoração LU

Qualquer matriz não-singular A pode ser decomposta no produto de duas matrizes como a seguir

$$A = LU \tag{A.9}$$

onde

U : matriz triangular superior;

L : matriz triangular inferior com diagonal unitária.

Essa decomposição é única e, como mostrado no Exemplo A.1, as matrizes fatores podem ser obtidas pelo processo de EG.

O sistema de equações poderá, então, ser resolvido em duas etapas:

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b} \tag{A.10}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{A.11}$$

entre $n + 1$ e n . Evidentemente este *loop* não deve ser executado. Este fato é previsto na maioria das linguagens computacionais utilizadas na implementação desses algoritmos.

A solução dos sistemas de equações acima, devido à sua estrutura particular, pode ser obtida de forma simples por processos de substituição direta e inversa (*forward and bakward substitution*).

O cálculo dos elementos de L e U , a partir do processo de EG, pode ser melhor entendido se representarmos cada passo deste processo através de matrizes. Seja o sistema de equações dado em (A.3). A obtenção do sistema equivalente (A.4) pode se representado pela seguintes transformações:

$$L_1 A \mathbf{x} = L_1 \mathbf{b} \quad (\text{A.12})$$

onde

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -l_{21} & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -l_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \dots, n \quad (\text{A.13})$$

Os passos seguintes do processo de eliminação podem, também, ser representados por matrizes L_2, \dots, L_{n-1} , com estrutura similar à de L_1 , ou seja,

$$U \mathbf{x} = \hat{L} A \mathbf{x} = \hat{L} \mathbf{b} \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\hat{L} = L_{n-1} L_{n-2} \dots L_2 L_1$$

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -l_{n,i} & & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (\text{A.15})$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, \dots, n$$

De (A.14), podemos concluir que:

$$U = \hat{L} A \quad (\text{A.16})$$

Multiplicando ambos os membros de (A.16) sucessivamente por L_{n-1}^{-1} , L_{n-2}^{-1} , ..., L_2^{-1} , L_1^{-1} , obtemos (A.9)

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-2}^{-1} L_{n-1}^{-1} \quad (\text{A.17})$$

A obtenção dos elementos de L e U pode ser realizada pelo algoritmo da Figura A.4 onde os elementos de U são armazenados no triângulo superior de A . Observe que este algoritmo é o mesmo algoritmo usado para a EG a menos da operação realizada no vetor \mathbf{b} . A solução dos sistema de equações, seguindo os dois passos representados por (A.10) e (A.11), é realizada pelo algoritmo da Figura A.5.

```

Para  $k = 1, \dots, n - 1$ 
  Para  $i = k + 1, \dots, n$ 
     $l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ 
    Para  $j = k + 1, \dots, n$ 
       $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}a_{kj}$ 
    Fim_para
  Fim_para
Fim_para

```

Figura A.4: Algoritmo para Fatoração LU

```

Para  $k = 1, \dots, n$ 
   $y_k = b_k$ 
  Para  $i = 1, \dots, k - 1$ 
     $y_k = y_k - l_{ki}y_i$ 
  Fimpara
Fim_para
Para  $k = n, n - 1, \dots, 1$ 
   $x_k = y_k$ 
  Para  $i = k + 1, \dots, n$ 
     $x_k = x_k - a_{ki}x_i$ 
  Fimpara
   $x_k = x_k/a_{kk}$ 
Fimpara

```

Figura A.5: Algoritmo para Solução usando os fatores LU

A.4 Ordenação

Nas seções anteriores, a solução dos sistemas de equações pelos métodos diretos foram efetuadas escolhendo-se como pivôs os elementos da diagonal principal das matrizes de coeficientes na ordem em que estes aparecem na matriz dada. Esta escolha *natural* não pode, em geral, ser seguida na prática devido às seguintes razões:

- Possível existência de elemento diagonal nulo;
- Erros de arredondamento;
- Esforço computacional elevado.

Uma escolha de pivôs completamente diferente pode ser obtida observando-se que a ordem referida acima como natural é função da maneira como as equações e variáveis são ordenadas, isto é, alterando-se esta ordenação qualquer elemento da matriz de coeficientes pode ser utilizado como pivô. Com isto evita-se o problema de pivôs nulos e pode-se otimizar o erro de arredondamento e esforço computacional.

Um critério de escolha de pivôs simples e com resultados práticos aceitáveis, do ponto de vista do erro de arredondamento, consiste em selecionar em cada linha ou coluna da matriz de coeficientes o elemento com maior valor absoluto. No caso dos problemas de redes elétricas, em muitos casos, as matrizes possuem *dominância diagonal*, isto é, os elementos da diagonal principal são maiores, em valor absoluto, que os elementos fora da diagonal. Conseqüentemente, escolhendo-se estes elementos como pivôs assegura-se uma boa precisão na solução de sistemas de equações. Uma vantagem adicional desta escolha é que a simetria em estrutura é preservada.

Uma vez escolhidos os elementos da diagonal principal como pivôs, resta estabelecer qual a melhor ordem de processamento desses elementos. Quando se utiliza o método nodal de análise de redes, isto equivale na prática a uma renumeração dos nós da rede. Esta escolha deve ser feita visando a minimização do esforço computacional (tempo de processamento e memória) necessários à solução do sistema de equações.

A.4.1 Ordenação para Preservar a Esparsidade

No caso de matrizes de coeficientes esparsas, o tempo de processamento e memória necessários para a solução do sistema de equações podem ser reduzidos drasticamente se forem armazenados e operados somente os elementos não nulos da matriz original e das matrizes fatores usadas nos métodos diretos. Quanto menor for a porcentagem de elementos não nulos nessas matrizes, menor será o esforço computacional necessário para a solução do problema.

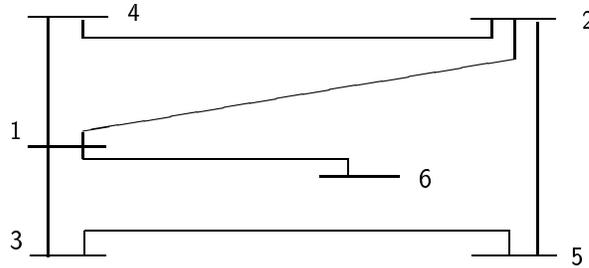


Figura A.6: Rede exemplo

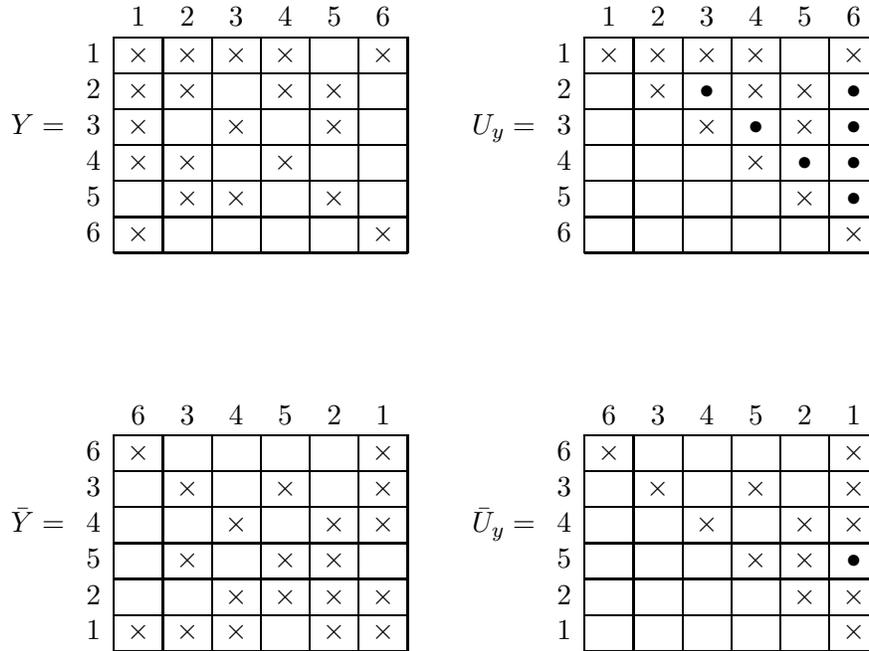
O número de elementos não nulos nas matrizes fatores depende fortemente do pivoteamento do sistema original. Uma ordenação adequada poderá gerar matrizes fatores com uma porcentagem de elementos não nulos próxima à da matriz original. O inverso poderá conduzir a matrizes fatores praticamente cheias. Para exemplificar o efeito da ordem de pivoteamento na esparsidade das matrizes fatores, considere o exemplo da figura A.6

Na figura A.7 são mostradas as estruturas das matrizes admitância de barras e suas formas triangulares obtidas através do processo de Eliminação de Gauss. Essas estruturas correspondem à ordem da numeração das barras (Y e U_y) e uma outra ordem escolhida com o objetivo de minimizar o aparecimento de elementos não nulos na matriz triangularizada (Y' e U'_y). O fenômeno da geração de elementos não nulos nas matrizes fatores em posições onde existiam elementos nulos na matriz original recebe o nome de *fill-in*.

A.4.2 Representação da Estrutura de Matrizes por Grafos

A estrutura das matrizes pode ser representada por grafos nos quais os nós representam as linhas ou colunas e os ramos representam os elementos não-nulos fora da diagonal principal. No caso das matrizes simétricas em estrutura, de particular interesse na análise de redes elétricas, os grafos possuem apenas um ramo ligando dois nós e, em geral, não é necessário associar-se uma direção aos ramos para os estudos de ordenação. No caso particular das matrizes de admitâncias, o grafo representativo da estrutura da matriz coincide com o grafo correspondente à rede que deu origem à matriz, excluindo-se as ligações à referência. Na figura A.8 (a) é mostrado o grafo correspondente à matriz de admitâncias da rede mostrada na figura A.6.

No processo de Eliminação de Gauss, a cada operação de pivoteamento corresponde a eliminação de um nó do grafo e a conexão entre si de todos os nós previamente conectados ao nó eliminado. O grafo assim obtido corresponde à parte da matriz onde ainda não foi efetuado o processamento. Os ramos introduzidos no grafo quando da eliminação de nós correspondem aos elementos não nulos criados no processamento dos elementos da matriz



× : posição dos elementos não nulos em Y e U_y
 • : elementos não-nulos introduzidos na triangularização de Y

Figura A.7: Exemplo do efeito da ordenação no *fill in*

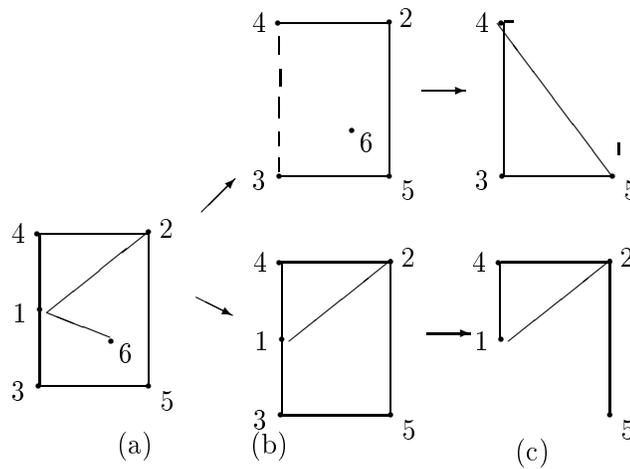


Figura A.8:

correspondente.

Na figura A.8 (b) e (c) são mostrados os dois primeiros passos do processo de Eliminação de Gauss aplicado ao grafo da matriz do exemplo da figura A.7 utilizando as duas ordens de eliminação usadas na seção anterior. Os elementos não nulos criados em cada passo do processo são representados por linhas tracejadas.

A.4.3 Esquemas de Ordenação

Nos exemplos vistos nas seções anteriores, observa-se que a criação de elementos não nulos no processo de Eliminação de Gauss, e seus derivados, é tanto maior quanto for o número de elementos não nulos na linha/coluna processada, ou caso se utilize a representação por grafos, o número de ramos conectados ao nó a ser eliminado. Assim, no exemplo da figura A.8, ao se eliminar o nó 1 no primeiro passo do processo, são criados cinco novos ramos (ou elementos não nulos na matriz), correspondentes à ligação entre si dos quatro nós conectados originalmente ao nó eliminado. Contrariamente, se o nó 6 for o escolhido para o primeiro passo do processo, nenhum elemento não nulo será criado pois o referido nó possui somente um ramo a ele conectado.

Das observações acima, que embora obtidas de um exemplo particular podem ser generalizadas para qualquer tipo de rede ou matriz, pode-se concluir que uma estratégia razoável para ordenação dos pivôs seria escolher inicialmente as linhas da matriz com menor número de elementos não nulos. Esta escolha produzirá matrizes fatores mais esparsas que aquelas geradas por uma ordenação qualquer. Entretanto, não garante uma ordenação ótima, isto é, uma ordenação que produzirá matrizes com o menor número possível de elementos não nulos. Tal ordenação somente pode ser alcançada se forem analisadas todas as possíveis ordens de eliminação e escolhida a melhor entre elas. Isto significaria simular, sem efetivamente resolver, o processo de Eliminação de Gauss para todas as possíveis combinações de ordem de eliminação do sistema de equações dadas. Na figura A.9 uma árvore mostrando todas as combinações possíveis no caso de uma matriz 3×3 é mostrada. Nesta árvore os números associados aos ramos correspondem às linhas/colunas processadas. O número de combinações possíveis é dado por $n!$ para uma matriz $n \times n$.

No caso de redes com dimensões reais, a escolha da ordem ótima exige um trabalho computacional excessivamente elevado o qual elimina as vantagens obtidas com a redução máxima na criação de elementos não nulos. Na prática, prefere-se trabalhar com uma ordenação sub-ótima que representa uma solução de compromisso entre o esforço computacional para obter a ordenação e a redução nos requisitos computacionais para a solução propriamente dita do sistema de equações.

Para aplicação em problemas de análise de redes elétricas, três esquemas de ordenação são geralmente citados na literatura:

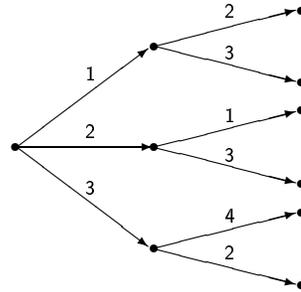


Figura A.9: Árvore de decisões no problema de ordenação

- **Esquema 1:** Ordenação em ordem crescente do número de elementos não nulos fora da diagonal principal da matriz original.
- **Esquema 2:** Ordenação tal que, em cada etapa do processo, a linha ou coluna da matriz a ser operada é aquela que contém o menor número de elementos não nulos.
- **Esquema 3:** Ordenação tal que, em cada etapa do processo, a linha ou coluna a ser operada é aquela que introduzirá o menor número de elementos não nulos nas matrizes fatores.

O esquema 1 é chamado de uma ordenação estática pois analisa a matriz de coeficientes na sua forma original. Os esquemas 2 e 3 são classificados como esquemas de ordenação dinâmicos pois consideram o efeito da criação de elementos não nulos em cada etapa do processo. Em comparação com a busca de uma ordenação ótima ilustrado na figura A.9, o esquema 1 analisa apenas o nó inicial da árvore enquanto os esquemas 2 e 3 analisam as porções da árvore mostradas na figura A.10 (a) e (b), respectivamente.

Estudos de simulação realizados com redes reais demonstram que o esquema 2 é aquele que produz os melhores resultados para as redes elétricas encontradas na prática, quando se leva em consideração o esforço total de ordenação e solução do sistema de equações.

Em certas situações pode ser vantajoso posicionar certas linhas/colunas da matriz nas últimas posições da lista ordenada de processamento, apesar desse procedimento contrariar a ordenação segundo o critério de criação mínima de elementos não nulos. Algumas dessas situações são:

- Quando sabe-se que modificações nos elementos da matriz original vão ocorrer apenas em algumas linhas/colunas; se estas linhas/colunas forem colocadas no final da lista, apenas os elementos desta parte da matriz fatores deverão ser modificados.

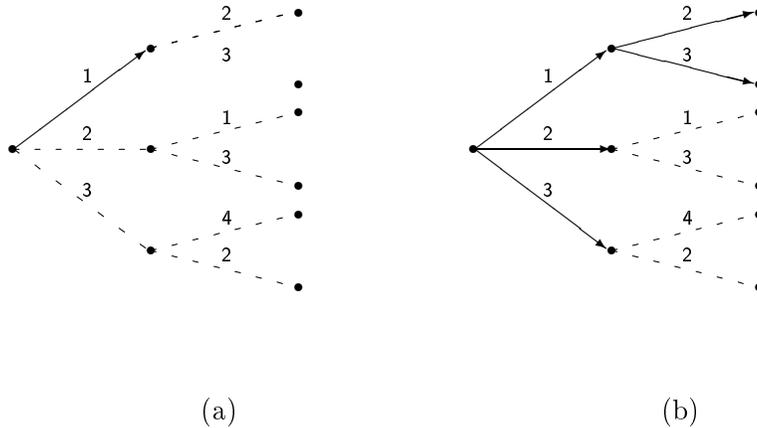


Figura A.10: Árvores de decisões para os Esquemas de Ordenação 2 e 3

- No caso de soluções sucessivas onde alguns poucos elementos do vetor \mathbf{b} são modificados; neste caso, se as linhas/colunas correspondentes a estes elementos são colocadas no final da lista, isto permite que, após a primeira solução, o processamento se restrinja à partição afetada pelas mudanças.
- No caso de matrizes com pequena assimetria estrutural; se as linhas/colunas são numeradas de maneira que a parte não simétrica da matriz se localize nas últimas posições, vantagens podem ser obtidas da simetria existente até este ponto.

A.5 Armazenamento de Matrizes Esparsas

Para os programas computacionais baseados nos métodos de solução de sistemas de equações descritos nas seções anteriores sejam eficientes, é necessário que técnicas especiais sejam empregadas no desenvolvimento dos mesmos. Estas técnicas têm o objetivo de armazenar e operar apenas com os elementos não nulos das matrizes de coeficientes e matrizes fatores. A economia de memória resultante dessa metodologia é óbvia. Quanto à redução no tempo de processamento, este pode ser entendido observando-se que, deste modo, são evitadas a realização de operações cujos resultados são previamente conhecidos, tais como multiplicações ou adições onde um dos operadores é nulo. Entretanto, os ganhos obtidos com estas técnicas tem como contrapartida uma programação complexa a qual requer habilidades especiais no desenvolvimento dos programas.

Para introduzir alguns esquemas de armazenamento de matrizes esparsas, a matriz Y correspondente à rede da figura A.6 será utilizada como exemplo. Nesses exemplos a matriz será, em princípio, considerada simétrica apenas na estrutura e não no valor numérico dos elementos. Para facilitar o entendi-

mento, a matriz será reescrita como:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & & Y_{16} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} & & Y_{24} & Y_{25} & \\ \hline Y_{31} & & Y_{33} & & Y_{35} & \\ \hline Y_{41} & Y_{42} & & Y_{44} & & \\ \hline & Y_{52} & Y_{53} & & Y_{55} & \\ \hline Y_{61} & & & & & Y_{66} \\ \hline \end{array}$$

Esquema 1

Este é um esquema de armazenamento muito simples e fácil de programar porém, como ficará claro mais adiante, pouco eficiente devido às dificuldades de localizar, recuperar e inserir novos elementos bem como à redundância de informações nele presentes. Os m elementos não nulos da matriz são armazenados em três vetores:

ILIN: índice de linhas (m)

ICOL: índice de colunas (m)

VAL: valor numérico dos elementos (m)

No caso da matriz Y dada acima, estes vetores seriam dados por:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	20
ILIN	1	1	1	1	1	2	2	2	2	...	6
ICOL	1	2	3	4	6	1	2	4	5	...	6
VAL	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{16}	Y_{21}	Y_{22}	Y_{24}	Y_{25}	...	Y_{26}

Esquema 2

É derivado do esquema 1 observando-se que o vetor ILIN contém informação redundante. Por exemplo, as cinco primeiras posições de ILIN são utilizadas para indicar que os respectivos elementos de VAL pertencem a linha 1 da matriz. Neste caso bastaria indicar, de uma maneira mais compacta, que esses elementos pertencem à linha 1. Isto pode ser obtido introduzindo-se o vetor INIL com o seguinte significado:

INIL: apontador do início de linha (n) em ICOL

Cada elemento de INIL indica a posição de ICOL e VAL onde se inicia a seqüência de elementos da linha correspondente. No caso do exemplo, os vetores seriam:

	1	2	3	4	5	6
INIL	1	6				

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	20
ICOL	1	2	3	4	6	1	2	4	5	...	6
VAL	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{16}	Y_{21}	Y_{22}	Y_{24}	Y_{25}	...	Y_{26}

No caso de matrizes simétricas em estrutura é conveniente armazenar os elementos da diagonal em um vetor à parte e desdobrar os elementos dos triângulos superiores e inferiores em dois vetores contendo os elementos simétricos em posições correspondentes. Assim, são introduzidos os vetores seguintes:

DIAG: valor numérico dos elementos da diagonal (n)

VALS e VALI: similares a VAL porém apenas os elementos dos triângulos superiores e inferiores respectivamente.

Com esta nova estrutura, a matriz do exemplo seria armazenada da seguinte maneira:

	1	2	3	4	5	6
INIL	1	5	7			
DIAG	Y_{11}	Y_{22}	Y_{33}	Y_{44}	Y_{55}	Y_{66}

	1	2	3	4	5	6	7
ICOL	2	3	4	6	4	5	5
VALS	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{16}	Y_{24}	Y_{25}	Y_{35}
VALI	Y_{21}	Y_{31}	Y_{41}	Y_{61}	Y_{42}	Y_{52}	Y_{53}

O fato de três últimas posições de vetor INIL neste exemplo permanecerem vazias é mera circunstância da rede e da ordenação dos nós usados. No caso de matrizes simétricas o vetor VALI é obviamente desnecessário.

Esquema 3

Os esquemas 1 e 2, como já citamos anteriormente, apresentam o inconveniente de requerer deslocamentos de um grande número de seus elementos sempre que algum novo elemento tiver que ser inserido ou retirado da estrutura de dados. Este inconveniente é grave no caso do método de Eliminação de Gauss e seus derivados pois, como visto em seções anteriores, neste método são criados elementos não nulos, isto é, em determinadas posições onde existia um elemento nulo na matriz original. Como em geral utiliza-se a mesma

estrutura de dados para armazenar a matriz original e as matrizes fatores, a necessidade de inserção de elementos é freqüente.

A inconveniência acima referida pode ser eliminada se ao invés de armazenar os elementos da matriz na sua ordem natural, for utilizado o conceito de listas encadeadas. Este conceito será ilustrado inicialmente através do problema de armazenamento de uma lista de número na ordem crescente de seu valor. Considere a seguinte lista de números a ser armazenada em um vetor VAL:

2,1 8,7 7,3 5,8 3,4 9,8

O armazenamento desta lista em ordem crescente seria dado por:

	1	2	3	4	5	6	7
VAL	2,1	3,4	5,8	7,3	8,7	9,8	-

Caso se pretenda introduzir um novo elemento na lista, por exemplo o número 6,3, todos os elementos de VAL, a partir da quarta posição do vetor, devem ser deslocados um espaço à frente para acomodar o novo elemento, gerando um novo vetor VAL como se segue:

	1	2	3	4	5	6	7
VAL	2,1	3,4	5,8	6,3	7,3	8,7	9,8

A tarefa de inserção ou retirada de elementos de uma lista pode ser facilitada se utilizarmos a estrutura de dados encadeada ilustrada a seguir:

	1	2	3	4	5	6	7
IPROX	5	6	2	3	4	0	
VAL	2,1	8,7	7,3	5,8	3,4	9,8	

Na estrutura de dados acima, o vetor IPROX indica a posição do próximo elemento da lista em ICOL.

A inclusão de IPROX permite a indicação da ordem desejada independente da ordem real dos elementos de VAL. No caso foi utilizada a ordem em que foram fornecidos os números. O valor zero de um elemento de IPROX indica o final da lista. A inserção de um novo elemento na lista, no caso o número 6,3, é realizada com a modificação/criação de apenas três elementos da estrutura de dados, independente do tamanho da lista, como é mostrado abaixo:

	1	2	3	4	5	6	7
IPROX	5	6	2	(7)	4	0	(3)
VAL	2,1	8,7	7,3	5,8	3,4	9,8	(6,3)

A introdução da idéia de encadeamento no esquema 2 de armazenamento de matrizes esparsas, produz o chamado esquema 3, o qual é usualmente utilizado nos programas de análise de redes elétricas. Para o caso da matriz usado como exemplo nesta seção, utilizando a ordem dos nós como mostrada na figura A.7, a estrutura de dados é:

	1	2	3	4	5	6
INIL	-	7	2	4	6	1
DIAG	Y_{11}	Y_{22}	Y_{33}	Y_{44}	Y_{55}	Y_{66}

	1	2	3	4	5	6	7
Iprox	0	0	2	0	4	0	0
ICOL	6	5	1	2	1	2	1
VAL	Y_{61}	Y_{35}	Y_{31}	Y_{42}	Y_{41}	Y_{52}	Y_{71}
VALI	Y_{21}	Y_{31}	Y_{41}	Y_{61}	Y_{42}	Y_{52}	Y_{53}

A.6 Métodos Iterativos

Maiores detalhes sobre os assuntos tratados nesta seção podem ser encontrados nas referências [15, 22].

A.6.1 Método de Jacobi

Seja o sistema de três equações

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

o qual pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/a_{11} (- a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + b_1) \\ x_2 &= 1/a_{22} (- a_{21}x_1 - a_{23}x_3 + b_2) \\ x_3 &= 1/a_{33} (- a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + b_3) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

O sistema de equações na forma (A.19) pode ser usado como um algoritmo iterativo para a solução do sistema original a partir de uma condição inicial arbitrária x_1^0, x_2^0, x_3^0 . Este esquema iterativo é conhecido como Método de Jacobi [15] e sua forma generalizada para n equações é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k + b_i \right) \\ & \quad i = 1, \dots, n \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

O método de Jacobi pode ser, também, apresentado em um formato matricial. Suponha a matriz A decomposta da maneira seguinte:

$$A = D - E - F \quad (\text{A.21})$$

onde:

D : matriz diagonal;

E : matriz triangular inferior com diagonal nula;

F : matriz triangular superior com diagonal nula.

No caso de três equações, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Defina:

$$L = D^{-1}E \quad (\text{A.22})$$

$$U = D^{-1}F \quad (\text{A.23})$$

No caso do Método de Jacobi, o processo iterativo é definido através da seguinte partição (*splitting*) da matriz de coeficientes:

$$Dx = (E + F)x + b \quad (\text{A.24})$$

de onde se obtém o algoritmo:

$$x^{k+1} = (I - L)x^k + (D - E)^{-1}b \quad (\text{A.25})$$

A matriz $(I - L)$ é denominada *Matriz de Iteração*.

A.6.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel difere do método de Jacobi pelo fato de usar no processo iterativo os valores atualizados das variáveis tão logo estes estejam disponíveis. O algoritmo de Gauss-Seidel é dado por [15]:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^k + b_i \right) \quad (\text{A.26})$$

$$i = 1, \dots, n \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Na formulação matricial, o processo iterativo é definido por

$$(D - E)x = Fx + b \quad (\text{A.27})$$

de onde se obtém o algoritmo

$$x^{k+1} = (I - L)Ux^k + (D - E)^{-1}b \quad (\text{A.28})$$

A.6.3 Método de Sobrerelaxação sucessiva (SOR)

É uma variante do método de Gauss-Seidel na qual a atualização das variáveis é realizada de acordo com [15]

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(\hat{x}_i^{k+1} - x_i^k) \quad (\text{A.29})$$

onde \hat{x}_i^{k+1} é o resultado da iteração de Gauss-Seidel e ω é o *Fator de Sobrerelaxação*.

A.6.4 Convergência

A forma geral dos métodos iterativos (Jacobi e Gauss-Seidel) descritos nas seções anteriores é

$$x^{k+1} = Hx^k + d \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.30})$$

Definição 1 O raio espectral de uma matriz A é definido como o autovalor de maior valor absoluto de A , ou seja,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad (\text{A.31})$$

onde λ_i , $i = 1, \dots, n$, são os autovalores de A .

Teorema 1 O método iterativo na forma geral acima (A.30) converge para qualquer condição inicial x^0 se, e somente se, $\rho(H) < 1$, sendo $\rho(H)$ o raio espectral da matriz de iteração H . Ainda mais, quanto menor for o valor de $\rho(H)$ mais rápida será a taxa de convergência.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada nas referências [22, 15].

Exemplo A.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes de iteração correspondentes aos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, respectivamente, são

$$H_J = L + U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$H_{GS} = L + U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

cujos valores do raio espectral são, respectivamente, $\rho(H_J) \approx 0$ e $\rho(H_{GS}) = 2$. Esses valores indicam que, para este sistema de equações, o método de Jacobi converge enquanto o de Gauss-Seidel diverge.

A.6.5 Método do Gradiente Conjugado

O método do Gradiente Conjugado (GC) foi introduzido em 1952 por Hestens and Stiefel. É baseado em técnicas de otimização de funções. Aplicado à solução de sistemas de equações algébricas lineares é, em princípio, um método direto. Porém, sua grande vantagem aparece quando é utilizado como um método iterativo.

Formulação de $Ax=b$ como um Problema de Minimização

Consideremos inicialmente o caso de um equação dada por

$$ax = b \quad (\text{A.32})$$

a partir da qual podemos definir

$$q = \frac{1}{2}ax^2 - bx \quad (\text{A.33})$$

O valor mínimo de q em (A.33) é obtido resolvendo-se

$$\frac{dq}{dx} = ax - b = 0 \quad (\text{A.34})$$

De (A.34) podemos concluir que resolver $ax = b$ é equivalente a encontrar o mínimo de q . A extensão para o caso multidimensional é óbvia e a função a ser minimizada é dada por

$$Q = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \quad (\text{A.35})$$

Solução do Problema de Minimização

Seja o problema

$$\min_x f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.36})$$

A maioria dos métodos de solução do problema definido em (A.36) baseia-se na geração de uma sequência de pontos no \mathbb{R}^n , a partir de um ponto inicial arbitrário, tal que

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.37})$$

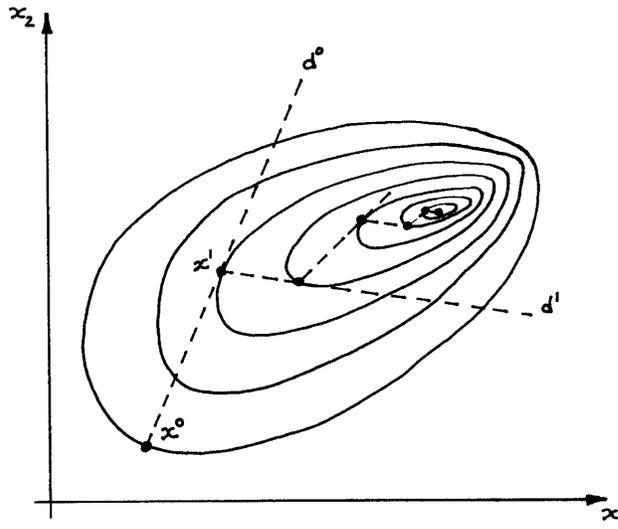


Figura A.11: Representação geométrica de um problema de minimização

Uma maneira de gerar uma sequência como a definida em (A.38) é através da recorrência

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.38})$$

onde

p^k : direção *conveniente*;

α_k : passo *conveniente* na direção p^k .

Este procedimento é ilustrado na Figura A.11 onde uma função de duas variáveis é representada por suas curvas de nível. A forma de escolher p^k e α_k determina o tipo de método de otimização. Um método simples é o Método do Gradiente (*Steepest Descent*) o qual é definido por

$$p^k = -\nabla f(x_k) \quad (\text{A.39})$$

$$\alpha_k = \left\{ \alpha \mid f(x^k - \alpha p^k) = \min_{\alpha} f(x^k - \alpha p^k) \right\} \quad (\text{A.40})$$

Aplicando (A.39) e (A.40) ao problema definido em (A.35), temos [22]

$$p^k = b - Ax^k \quad (\text{A.41})$$

$$\alpha_k = \frac{(p^k)^T (Ax^k - b)}{(p^k)^T A p^k} \quad (\text{A.42})$$

Método das Direções Conjugadas

Definição 2 Um conjunto de direções (vetores) p^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, são considerados conjugadas, em relação a uma matriz A ($n \times n$), se

$$(p^i)^T A p^j = 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j \quad (\text{A.43})$$

Teorema 2 Se A é real, simétrica e positiva definida, e p_i , $i = 0, 1, \dots, p_{n-1}$ são vetores não nulos satisfazendo (A.43) então, para qualquer x_0 , o processo iterativo

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k p^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.44})$$

onde α_k é escolhido de acordo com (A.42), converge para a solução exata de $Ax = b$ em não mais que n passos.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada em [22]. Este teorema é válido se considerarmos uma aritmética com precisão infinita, isto é, um sistema de computação sem erro de arredondamento. Nesta situação, o método das Direções Conjugadas, definido pelo teorema, é de fato um método direto. Entretanto, a importância prática deste método reside no fato do mesmo poder ser utilizado como um método iterativo pois, na maioria das aplicações práticas, o método converge em um número de iterações muito menor que n desde que a matriz A seja bem condicionada.

Método do Gradiente Conjugado

Se no método das direções conjugadas escolhermos como direção inicial

$$p^0 = -\nabla Q = -(Ax - b) \quad (\text{A.45})$$

teremos o método do Gradiente Conjugado (GC). O algoritmo completo do método CG é dado na Figura A.6.5 onde é usada a notação $(x, y) = x^T y$ (produto escalar).

A.6.6 Método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado

Uma estimativa da taxa de convergência do método GC é dada por [22]

$$\|x^k - \hat{x}\|_2 \leq 2\sqrt{\kappa} (\sigma)^k \|x^0 - \hat{x}\|_2 \quad (\text{A.46})$$

onde

k : número de iterações;

\hat{x} : solução exata de $Ax = b$;

$$\sigma = \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1};$$

```

Escolha  $x^0$ , faça  $p^0 = r^0 = b - Ax^0$ 
Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ 
   $\alpha^k = (r^k, r^k)/(p^k, A p^k)$ 
   $x^{k+1} = x^k - \alpha^k p^k$ 
   $r^{k+1} = r^k + \alpha^k A p^k$ 
  Se  $\|r^{k+1}\|_2^2 \leq \epsilon$ , então, PARE.
  Senão, faça
     $\beta^k = (r^{k+1}, r^{k+1})/(r^k, r^k)$ 
     $p^{k+1} = r^{k+1} + \beta^k p^k$ 
  Fim_se
Fim_para

```

Figura A.12: Algoritmo do Gradiente Conjugado

$$\kappa = \text{cond}(A) = \lambda_n/\lambda_1;$$

λ_n e λ_1 : maior e menor autovalor de A , respectivamente.

O valor κ é denominado *Número de Condicionamento* de A . De (A.46) conclui-se que

$$\begin{aligned} \kappa = 1 &\Rightarrow \sigma = 0 \\ \kappa \rightarrow \infty &\Rightarrow \sigma \rightarrow 1 \end{aligned}$$

ou seja, quanto maior for número de condicionamento de A , mais próximo de 1 será o valor de σ e, portanto, mais lenta será a convergência do método.

Baseado no resultado mostrado acima, introduz-se a idéia do pré-condicionamento, a qual é implementada através de uma transformação de congruência em A

$$\hat{A} = SAS^T \quad (\text{A.47})$$

tal que

$$\text{cond}(\hat{A}) < \text{cond}(A) \quad (\text{A.48})$$

Essa transformação é obtida manipulando-se o sistema de equações original até atingir a forma seguinte

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b}^T \quad (\text{A.49})$$

onde

$$\hat{A} = SAS^T \quad (\text{A.50})$$

$$\hat{x} = S^{-1}x \quad (\text{A.51})$$

$$\hat{b} = Sb \quad (\text{A.52})$$

O método do GC poderia, simplesmente, ser aplicado ao sistema transformado (A.49) porém, do ponto de vista computacional, é mais eficiente manter o sistema original e modificar os passos do algoritmo da maneira mostrada a seguir

$$\hat{r}^0 x = \hat{b} - \hat{A}\hat{x}^0 \quad (\text{A.53})$$

$$= Sb - SAS^T S^{-T} x^0 \quad (\text{A.54})$$

$$= S(b - Ax)^0 \quad (\text{A.55})$$

$$= Sr^0 \quad (\text{A.56})$$

e

$$\hat{p}^0 x = sr^0 \quad (\text{A.57})$$

$$(\hat{r}^0, r^0) = (Sr^0)^T (Sr^0) = (S^T Sr^0)r^0 \quad (\text{A.58})$$

$$r^0 = (S^T S)^{-1} \hat{r}^0 = M\hat{r}^0 \quad (\text{A.59})$$

A matriz M deve ser escolhida de maneira tal que

- O sistema de equações $M\hat{r} = r$ seja de fácil solução.
- M seja uma boa aproximação de A .

Na Figura A.6.6 é apresentado o algoritmo do Gradiente Conjugado Pré-condicionado (PGC).

A.6.7 Método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado

Para sistemas assimétricos tem sido empregado o método do Gradiente Bi-Conjugado (Precondicionado) ((P)Bi-CG) [15]. O método Bi-CG é uma generalização do CG, onde se trabalha tanto com a matriz A como com sua transposta A^t , gerando duas sequências de vetores análogos ao do CG. O esquema iterativo garante a mútua ortogonalidade ou *bi-ortogonalidade* entre os pares de vetores de direções e resíduos. O método do PBi-CG, no entanto, pode apresentar convergência irregular e existe a possibilidade do método falhar.

Com o objetivo de evitar o padrão irregular de convergência do Bi-CG, foi desenvolvido o método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (Precondicionado) ((P)Bi-CGSTAB) [29] para solução de sistemas lineares assimétricos. O método Bi-CGSTAB é uma variação do Bi-CG, onde não se trabalha com a transposta da matriz de coeficientes e que apresenta uma velocidade de convergência de aproximadamente duas vezes a do Bi-CG, com melhores características de robustez de convergência.

O algoritmo do método PBi-CGSTAB aplicado ao sistema, com preconditionador M é mostrado na Figura A.6.7

Escolha x^0 , faça $r^0 = b - Ax^0$
 Resolva $M\tilde{r}^0 = r^0$
 Faça $p^0 = \tilde{r}^0$
 Para $k = 0, 1, 2, \dots$
 $\alpha^k = (\tilde{r}^k, r^k) / (p^k, A p^k)$
 $x^{k+1} = x^k - \alpha^k p^k$
 $r^{k+1} = r^k + \alpha^k A p^k$
 Se $\|r^{k+1}\|_2^2 \leq \epsilon$, então PARE.
 Senão:
 Resolva: $M\tilde{r}^{k+1} = r^{k+1}$
 Faça: $\beta^k = (\tilde{r}^{k+1}, r^{k+1}) / (\tilde{r}^k, r^k)$
 $p^{k+1} = \tilde{r}^{k+1} + \beta^k p^k$
 Fim_se
 Fim_para

Figura A.13: Algoritmo Gradiente Conjugado Pré-condicionado

```

Escolha  $x^0$ 
Calcule  $r^0 = b - Ax^0$ 
Faça  $\tilde{r} = r^0$ 
       $p^1 = r^0$ 
Calcule  $\rho^0 = (\tilde{r}, r^0)$ 
Para  $k = 1, 2, \dots$ 
  Resolva  $M\tilde{p} = p^k$ 
  Faça  $v^k = A\tilde{p}$ 
       $\alpha^k = \rho^{k-1} / (\tilde{r}, v^k)$ 
       $s = r^{k-1} - \alpha^k v^k$ 

  Resolva  $M\tilde{s} = s$ 
  Faça  $t = A\tilde{s}$ 
       $\omega^k = (t, s) / (t, t)$ 
       $x^k = x^{k-1} + \alpha^k \tilde{p} + \omega^k \tilde{s}$ 
       $r^k = s - \omega^k t$ 

  Se  $\|r^k\|_2^2 \leq \epsilon$ , então PARE
  Senão,
      Calcule  $\rho^k = (\tilde{r}, r^k)$ 
             $\beta^k = (\rho^k / \rho^{k-1}) / (\alpha^k / \omega^k)$ 
             $p^{k+1} = r^k + \beta^k (p^k - \omega^k v^k)$ 

  Fim_se
Fim_para

```

Figura A.14: Algoritmo Bi-CGSTAB Pré-condicionado

Apêndice B

Programação Não-Linear

B.1 Enunciado Geral

O Problema de Programação Não-Linear (PPNL) pode ser enunciado na seguinte forma geral

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1})$$

$$\text{s. a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (\text{B.3})$$

onde

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de decisão;

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo;

$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são as restrições de igualdade; e

$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ são as restrições de desigualdade.

As restrições de igualdade e desigualdade delimitam um subconjunto X do \mathbb{R}^n denominado Conjunto Viável e definido por

$$X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\} \quad (\text{B.4})$$

Exemplo B.1 *A seguir é apresentado um PPNL com duas variáveis de decisão e apenas restrições de desigualdade.*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \\ \text{s. a } h_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 0,5 \geq 0 \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_1 \geq 0 \\ h_4(\mathbf{x}) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$.

B.1.1 Casos Particulares

Problema de Programação Linear (PPL)

Se todas as funções em (B.1) a (B.3) forem lineares, teremos um PPL o qual pode ser escrito como

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{s. a} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{B.7})$$

onde \mathbf{c} é o vetor de *custos* associados às variáveis de decisão e A é uma matriz de coeficientes representando as restrições de igualdade.

Problema de Programação Quadrática (PPQ)

Neste caso, a função objetivo é quadrática enquanto as restrições são lineares. O PPQ pode ser enunciado como a seguir

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \quad (\text{B.8})$$

$$\text{s. a} \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{B.9})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{B.10})$$

onde Q é uma matriz definida positiva.

B.2 Representação Gráfica

No caso de um problema com duas variáveis, é possível representar o PPNL de forma gráfica. Nessa representação, a função objetivo é representada por *curvas de nível*, as quais são projeções dos contornos da interseção de planos paralelos ao plano onde será realizada a representação gráfica com a superfície representando a função objetivo.

Na representação gráfica deve-se levar em consideração duas propriedades do gradiente¹:

- O gradiente é perpendicular à curva de nível passando pelo ponto considerado;
- O gradiente aponta na direção de *máximo crescimento local* da função.

¹O gradiente de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como

$$\nabla f(\mathbf{x}) = [\partial f(\mathbf{x})/\partial x_1 \quad \partial f(\mathbf{x})/\partial x_2 \dots \partial f(\mathbf{x})/\partial x_n]^T$$

Exemplo B.2 *Seja o PPNL apresentado no Exemplo B.1. A representação gráfica desse problema é apresentada na Figura B.1. A figura (a) apresenta uma representação tridimensional da função objetivo na qual observa-se que o mínimo da função, não considerando as restrições, encontra-se no ponto $x^* = (0, -1)$, o qual situa-se no eixo vertical d e abaixo do plano definido pelos eixos x_1 e x_2 . Na figura (b) estão indicados as curvas de nível da função objetivo, para os valores 0,125, 0 e 0,4375, respectivamente, e o conjunto viável X delimitado pelas restrições. Uma análise da figura (b) permite concluir que o mínimo da função objetivo, considerando apenas os pontos pertencentes ao conjunto viável, ocorre no ponto $x^{**} = [0,5 \ 0]^T$.*

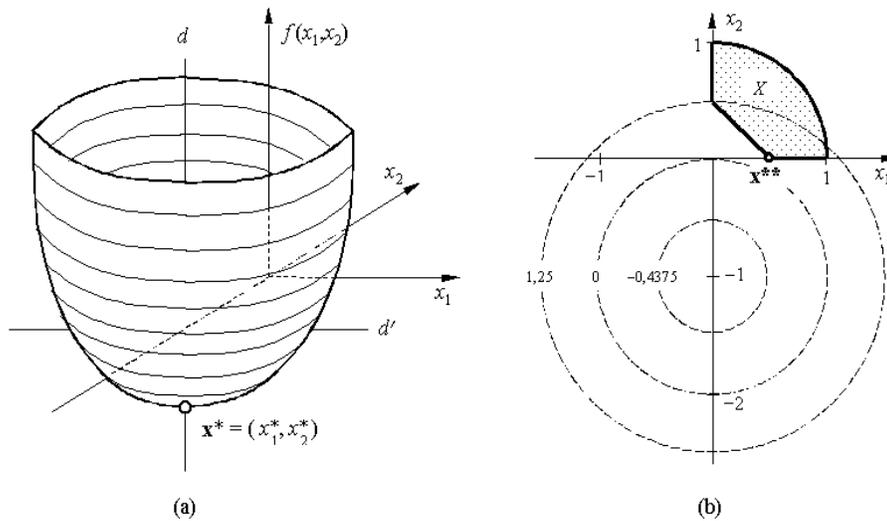


Figura B.1: Representação gráfica de um PPNL com duas variáveis.

B.3 Condições de Otimalidade

Definição 3 (Mínimo Absoluto ou Global)

Uma função $f(\mathbf{x})$, definida em um subconjunto fechado $S \subset \mathbb{R}^n$, assume seu mínimo absoluto ou global em um ponto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ se

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Definição 4 (Mínimo Relativo ou Local)

Seja $f(\mathbf{x})$ definida em uma vizinhança de raio δ de $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Então, $f(\mathbf{x})$ tem um mínimo local em \mathbf{x}^* se existir um ϵ , $0 \leq \epsilon \leq \delta$, tal que para todo \mathbf{x} , $0 \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}^*| \leq \epsilon$, tem-se $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$.

B.3.1 PPNL sem Restrições

Seja o PPNL definido por:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.11})$$

A *condição necessária* [14] para que um ponto seja solução do problema acima é

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{B.12})$$

e a *condição suficiente*

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) > \mathbf{0} \quad (\text{B.13})$$

A condição acima indica que a matriz Hessiana² deve ser definida positiva³.

Exemplo B.3 Considere o PPNL

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2$$

Da *condição necessária de otimalidade*, obtemos

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 + 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = -1 \end{cases}$$

Para assegurar que o ponto acima é a solução do problema, testamos a *condição suficiente*

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz acima é, claramente, positiva definida. Portanto, o ponto $\mathbf{x} = [0 \ -1]^T$ é a solução do problema.

B.3.2 PPNL com Restrições de Igualdade

Seja o PPNL definido por

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.14})$$

$$\text{s. a } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.15})$$

²A matriz Hessiana de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$H(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

³Uma matriz A é positiva definida se: a) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$; b) ou todos os seus autovalores são positivos; c) ou todos os determinantes dela extraídos são positivos.

Seja a função $L(\mathbf{x}, \lambda)$, denominada *Função Lagrangeana ou Lagrangeano*, definida como

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.16})$$

$$= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad (\text{B.17})$$

onde $\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p]^T$ é o chamado vetor dos *Multiplicadores de Lagrange*.

Pode ser demonstrado [14] que a condição necessária para que \mathbf{x}^* seja a solução de (B.14) e (B.15) é que

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda) = \mathbf{0} \quad (\text{B.18})$$

ou seja,

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \lambda^*)}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{B.20})$$

O conjunto de equações definido em (B.19) e (B.20) tem $n + p$ equações em igual número de variáveis. Pode, portanto, ser resolvido para calcular as componentes de \mathbf{x}^* e λ^* .

As condições (B.19) e (B.20) podem ser expressas em forma compacta por

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{B.22})$$

A equação B.21 indica que, na solução, o gradiente da função objetivo pode ser expresso como uma combinação linear dos gradientes das funções representando as restrições. Essa propriedade é ilustrada no exemplo B.4.

Condições suficientes de otimalidade podem, também, ser derivadas neste caso mas não apresentam interesse prático.

Exemplo B.4 *Considere o PPNL*

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \\ \text{s. a} \quad g_1(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 0,5 = 0 \end{aligned}$$

O Lagrangeano neste caso é

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 0,5)$$

Da condição necessária de otimalidade, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 + 2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 - 0,5 = 0\end{aligned}$$

De onde se obtém a solução do problema: $\mathbf{x}^* = [0,75 \ -0,25]^T$ e $\lambda^* = -1,5$. A função objetivo neste caso assume o valor $f(\mathbf{x}) = 0,125$.

As propriedades geométricas do problema resolvido neste exemplo são ilustradas na Figura B.2. Nessa figura, os vetores representando os gradientes da função objetivo e restrição de igualdade têm a direção correta porém os módulos foram escalados para facilitar o entendimento da figura. No caso da função objetivo, por se tratar de um problema de minimização, a figura mostra o negativo do vetor gradiente. Na solução ótima (\mathbf{x}^*) os vetores gradientes estão alinhados de acordo com a condição de otimalidade expressa em B.21. Nesse ponto, qualquer deslocamento incremental da solução sobre a restrição implica em aumento da função objetivo. Em qualquer outro ponto da reta representando a restrição de igualdade, como nos pontos \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b , o gradiente da função objetivo e da restrição não estão alinhados, o que permite redução no valor da função objetivo para deslocamentos na direção representada pela projeção na restrição da resultante da adição dos gradientes.

B.3.3 PPNL com Restrições de Igualdade e Desigualdade

Seja o PPNL definido por

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.23})$$

$$\text{s. a} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (\text{B.25})$$

Este problema pode ser reduzido ao problema do item anterior pela introdução de *variáveis de folga* como mostrado a seguir

$$\min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) \quad (\text{B.26})$$

$$\text{s. a} \quad g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{B.27})$$

$$h_i(\mathbf{x}) + v_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{B.28})$$

Neste caso, o Lagrangeano é dado por

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^q \mu_i [h_i(\mathbf{x}) + v_i^2] \quad (\text{B.29})$$

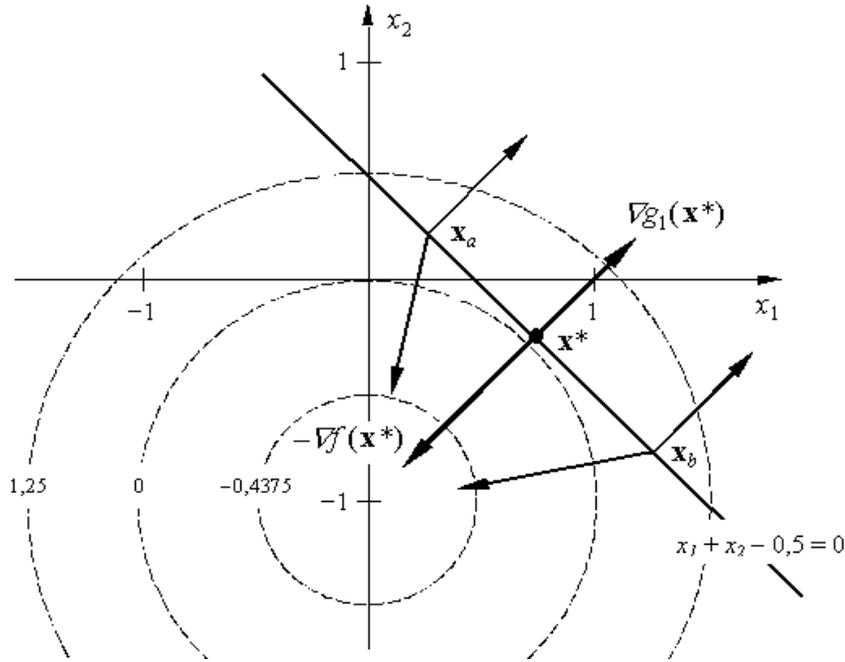


Figura B.2: Ilustração gráfica do exemplo B.4

onde $\mathbf{v} = [v_1 v_2 \dots v_q]^T$.

A condição necessária de otimalidade neste caso é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_{j=1}^q \mu_j \frac{\partial h_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = h_i(\mathbf{x}^*) + v_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = 2v_i \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{B.33})$$

No ponto \mathbf{x}^* , algumas restrições de desigualdade serão *ativas* ($h_i(\mathbf{x}^*) = 0$) e outras *não-ativas* ($h_i(\mathbf{x}^*) < 0$). No caso das restrições ativas⁴, temos

$$v_i = 0, \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, \dots, l$$

e para as não-ativas

$$v_i \neq 0, \quad \mu_i = 0, \quad i = l + 1, \dots, q$$

⁴A condição $\mu_i > 0$ para as restrições ativas é demonstrada em [14]

onde $l < q$.

Neste caso, as condições de otimalidade podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_{j=1}^l \mu_j \frac{\partial h_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i} = h_i(\mathbf{x}^*) < 0, \quad \mu_i = 0, \quad i = l + 1, \dots, q \quad (\text{B.37})$$

As condições impostas às restrições de desigualdade ativas e não-ativas podem ser combinadas como a seguir

$$h_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{B.38})$$

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, q \quad (\text{B.39})$$

$$\sum_{i=1}^q \mu_i h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{B.40})$$

Combinando-se os resultados mostrados acima chega-se às chamadas condições de Karush-Kuhn-Tucker, as quais são dadas por

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^q \mu_i \nabla h_i(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{B.41})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\text{B.42})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (\text{B.43})$$

$$\boldsymbol{\mu} \geq \mathbf{0} \quad (\text{B.44})$$

$$\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{B.45})$$

Exemplo B.5 Considere o PPNL

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \\ \text{s. a} \quad h_1(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 - 0,5 \geq 0 \\ h_2(\mathbf{x}) &= x_1 \geq 0 \\ h_3(\mathbf{x}) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

o qual é similar ao problema do Exemplo B.1 exceto pela ausência da restrição não-linear. Da geometria do problema, sabemos que as restrições h_1 e h_3 são ativas na solução enquanto a restrição h_2 é inativa. Portanto, podemos

estabelecer diretamente o Lagrangeano e derivar as condições necessárias de otimalidade. O Lagrangeano neste caso é

$$L(\mathbf{x}, \mu_1, \mu_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 + \mu_1(-x_1 - x_2 + 0,5) + \mu_3(-x_2)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 - \mu_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 + 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_1} &= x_1 + x_2 - 0,5 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_3} &= x_2 = 0 \end{aligned}$$

A solução do problema é $\mathbf{x} = [0,5 \quad 0]^T$, $\mu_1 = 1$, e $\mu_3 = 2$.

As propriedades geométricas do problema resolvido neste exemplo são ilustradas na Figura B.3.3. Nesta figura podemos observar que deslocamentos incrementais para reduzir a função objetivo só podem ser realizados em direções formando um ângulo menor que 90° com $-\nabla f_{\mathbf{x}^*}$. Desta figura podemos também concluir que para que um ponto \mathbf{x}^* seja solução do problema este ponto deve ser tal que $-\nabla f_{\mathbf{x}^*}$ estejam localizado no cone formado por $\nabla h_1 \mathbf{x}^*$ e $\nabla h_3 \mathbf{x}^*$. Esta afirmação é equivalente a

$$\begin{aligned} -\nabla f_{\mathbf{x}^*} &= \mu_1 \nabla h_1 \mathbf{x}^* + \mu_3 \nabla h_3 \mathbf{x}^* \\ \mu_1, \mu_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

B.4 Métodos de Solução do PPNL sem Restrições

A solução do PPNL sem restrições pode ser obtida resolvendo-se o conjunto de equações definidas pelas condições de otimalidade. Uma forma indireta de se obter a solução do PPNL é pela geração de uma seqüência $\{\mathbf{x}^k\}$, a partir de um ponto inicial arbitrário \mathbf{x}^0 , tal que cada novo ponto gerado produza uma redução no valor da função objetivo.

Uma seqüência $\{\mathbf{x}^k\}$, com a propriedade acima, pode ser gerada se, em cada ponto \mathbf{x}^k da seqüência,

- escolhermos uma direção *conveniente* \mathbf{d}^k ;
- determinarmos um passo *conveniente* λ^k a ser dado nessa direção.

Isto equivale a dizer que a seqüência será gerada de acordo com

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \mathbf{d}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.46})$$

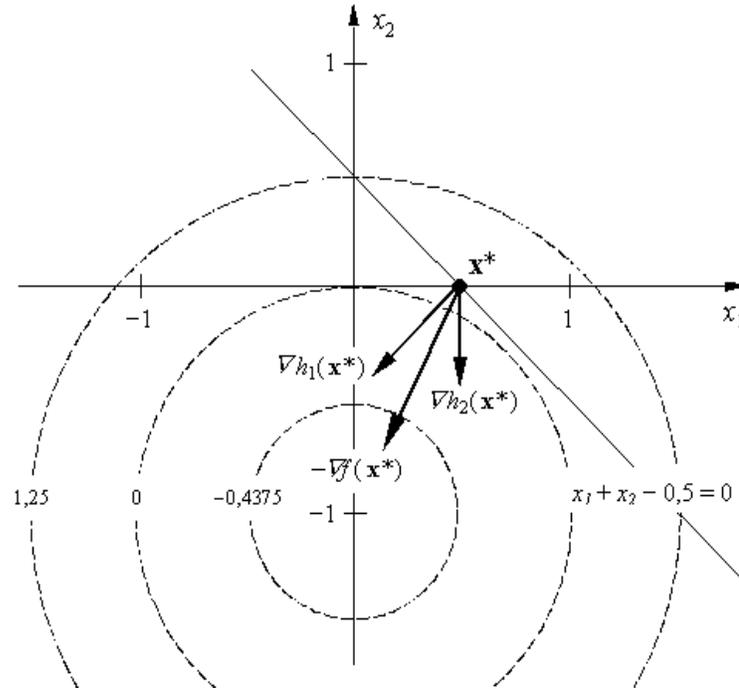


Figura B.3: Ilustração gráfica do exemplo B.5

Este procedimento é ilustrado na Figura B.4 para uma função objetivo com duas variáveis.

Os princípios ou métodos usados para a escolha da direção e do passo caracterizam diferentes métodos de solução do PPNL. Uma forma conveniente para escolher o passo é obter um valor de λ^k que minimize $f(\mathbf{x})$ na direção adotada. Este procedimento exige a solução de um problema de minimização unidirecional.

B.4.1 Minimização Unidirecional

Um problema de minimização unidirecional consiste na minimização de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, em uma direção $\mathbf{d}^k \in \mathbb{R}^n$, a partir de um ponto $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$. De forma compacta, este problema pode enunciado como

$$\min_{\lambda} f(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{d}^k) \quad (\text{B.47})$$

Na Figura B.5 o problema de minimização unidirecional é ilustrado graficamente.

Exemplo B.6 Considere a função

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1$$

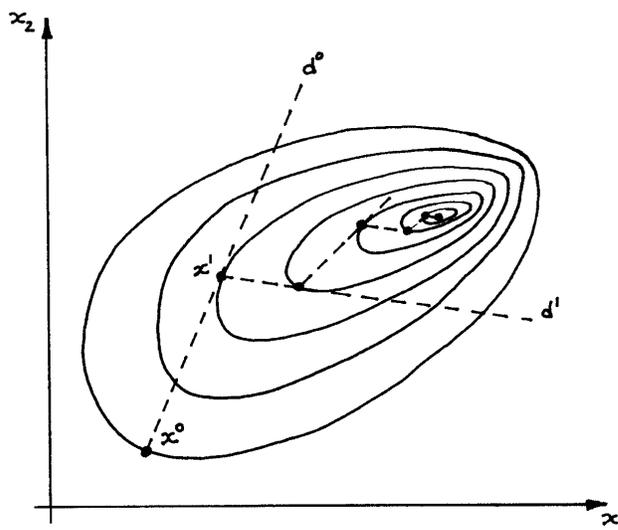


Figura B.4: Exemplo de método indireto de solução do PPNL

a ser minimizada a partir do ponto \mathbf{x}^0 na direção \mathbf{d}^0 como definidos a seguir

$$\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Cada ponto ao longo da direção considerada é representado por

$$(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{d}^0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \lambda \\ 1 - 3\lambda \end{bmatrix}$$

Substituindo na função, temos

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{d}^0) &= (2 + \lambda)^2 + 4(1 - 3\lambda)^2 - 4(2 + \lambda) \\ &= 37\lambda^2 - 24\lambda \end{aligned}$$

O mínimo encontra-se no ponto onde

$$\frac{df(\mathbf{x}^0 + \lambda \mathbf{d}^0)}{d\lambda} = 74\lambda - 24 = 0$$

de onde se obtém $\lambda = 0,32$ e

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0,32 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,32 \\ 0,04 \end{bmatrix}$$

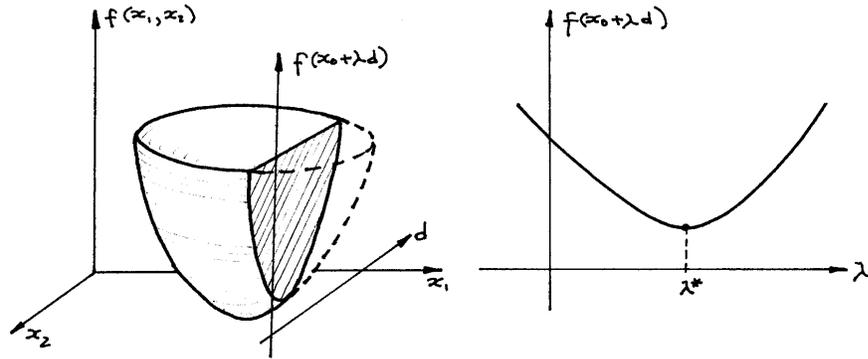


Figura B.5: Representação gráfica de um problema de minimização unidirecional.

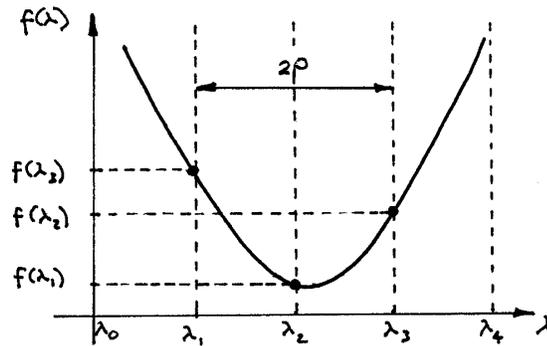


Figura B.6: Método de redução de intervalo

Método de Redução de Intervalo

Este método determina a posição do ponto de mínimo em um intervalo $[a b]$ de comprimento 2ρ . O método consiste na avaliação da função para valores consecutivos da variável λ , espaçados de um valor ρ , a partir de uma condição inicial λ_0 . O intervalo $[a b]$ é encontrado quando

$$f(\lambda_{i+1}) \geq f(\lambda_i) \quad (\text{B.48})$$

Neste caso, temos $a = \lambda_{i-1}$ e $b = \lambda_{i+1}$. O procedimento acima é ilustrado na Figura B.6 e o algoritmo para implementação deste método é dado na Figura B.4.1.

```

Faça  $i = 0, \lambda_0 = 0$ 
Calcule  $f(\lambda_i)$ 
Faça_enquanto  $f(\lambda_{i+1}) < f(\lambda_i)$ 
    Calcule  $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \rho$ 
    Calcule  $f(\lambda_{i+1})$ 
Fim_faça_enquanto
Faça  $a = \lambda_{i-1}$ 
     $b = \lambda_{i+1}$ 

```

Figura B.7: Algoritmo do Método de Redução de Intervalo

includegraphics *[0,0][13cm,6cm]pnl4.bmp

Figura B.8: Método da Seção Áurea

Método da Seção Áurea

Este método permite determinar o intervalo onde se encontra o mínimo da função, com uma precisão arbitrária ϵ , dentro de um intervalo $[a, b]$. O método baseia-se na divisão do intervalo em três partes definidas pelos chamados *Números Áureos*: 0,3820 e 0,6180. A função é avaliada nos novos dois pontos (ω e ν) e o novo intervalo determinado como a seguir:

Se $f(\omega) < f(\nu) \Rightarrow$ Novo intervalo : $[a, \nu]$

Se $f(\omega) \geq f(\nu) \Rightarrow$ Novo intervalo : $[\omega, b]$

O método da Seção Áurea é ilustrado na Figura B.8 e o algoritmo correspondente é apresentado na Figura B.4.1.

Interpolação Quadrática

Este método é aplicável ao caso de funções duplamente diferenciáveis. Baseia-se na aproximação da função no ponto λ_0 por uma função quadrática, obtida a partir da expansão da função pela série de Taylor, como mostrado a seguir

$$f(\lambda) \simeq f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2}f''(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2 \quad (\text{B.49})$$

O mínimo de B.49 é obtido fazendo-se:

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = f'(\lambda_0) + f''(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) = 0 \quad (\text{B.50})$$

de onde se obtém

$$\lambda^* = \lambda_0 - \frac{f'(\lambda_0)}{f''(\lambda_0)} \quad (\text{B.51})$$

```

Faça  $i = 0$ ,  $l_0 = b - a$ ,  $a_0 = a$  e  $b_0 = b$ 
Faça _enquanto  $l_i \leq \epsilon$ 
  Calcule  $\omega_i = a_i + 0,3820 l_i$ 
  Calcule  $\nu_i = a_i + 0,6180 l_i$ 
  Se  $f(\omega_i) < f(\nu_i)$ 
    Faça  $a_{i+1} = a_i$ ,  $b_{i+1} = \nu_i$ 
  Senão,
    Faça  $a_{i+1} = \nu_i$ ,  $b_{i+1} = b_i$ 
  Fim _se
  Faça  $i = i + 1$ ,  $l_i = a_i - b_i$ 
Fim _faça _enquanto
Faça  $\lambda^* = (a_i + b_i)/2$ 

```

Figura B.9: Algoritmo do Método da Seção Áurea

Caso não seja possível calcular as derivadas da função, ainda assim é possível estabelecer uma aproximação quadrática da função usando técnicas de ajuste de funções.

B.4.2 Método do Gradiente

Este método baseia-se na propriedade já mencionada do gradiente de indicar a direção de máximo crescimento local da função. É conhecido, também, pelas designações de *Steepest Descent Method* e Método de Cauchy. Nesse método, inicia-se o processo iterativo a partir de uma condição inicial \mathbf{x}_0 e gera-se uma seqüência de acordo com a seguinte regra

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \lambda^k \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad (\text{B.52})$$

onde λ^k é o passo ótimo na direção $-\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})^k$, obtido resolvendo-se um problema de minimização unidirecional como mostrado nas seções anteriores. É possível utilizar-se estratégias heurísticas na escolha do passo λ^k as quais podem ser mais eficientes do ponto de vista computacional.

Na Figura B.4.2 é apresentado o algoritmo do Método do Gradiente.

B.4.3 Método de Newton

A idéia básica do Método de Newton é aproximar a função objetivo por uma função quadrática e achar o mínimo dessa função analiticamente. Na vizinhança de um ponto \mathbf{x}_i , a função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ pode ser aproximada por

$$f(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}^0) + \nabla f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \quad (\text{B.53})$$

```

Escolha  $\mathbf{x}_0$  e  $\epsilon$ 
Faça  $i = 0$ 
Faça _enquanto  $\|\nabla f(\mathbf{x}^i)\| > \epsilon$ 
  Calcule  $\nabla f(\mathbf{x}^i)$ 
  Faça  $\mathbf{d}^i = -\nabla f(\mathbf{x}^i)$ 
  Calcule  $\lambda^i$  tal que
     $\mathbf{f}[\mathbf{x}^i - \lambda^i \mathbf{d}^i] = \min_{\lambda} \mathbf{f}[\mathbf{x}^i - \lambda \mathbf{d}^i]$ 
  Faça  $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \lambda^i \mathbf{d}^i$ 
Fim _faça _enquanto

```

Figura B.10: Algoritmo do Método do Gradiente

Neste caso, o mínimo de $f(\mathbf{x})$ é obtido resolvendo-se

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}^0) + \nabla^2 f(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = 0 \quad (\text{B.54})$$

de onde se obtém uma aproximação da solução (\mathbf{x}^1) dada por

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + [\nabla^2 f(\mathbf{x}^0)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^0) \quad (\text{B.55})$$

A partir de \mathbf{x}^1 , a função é novamente aproximada e assim por diante como no algoritmo a seguir

$$\boxed{\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^i)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^i)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.56})$$

No caso de funções quadráticas, pode-se mostrar (veja Exemplo B.7) que o Método de Newton converge em uma iteração. Para funções não-quadráticas, o algoritmo necessita de mais iterações para obter a solução. O Método de Newton enquadra-se no princípio geral de funcionamento de métodos de solução do PPNL, enunciado no início dessa seção, se consideramos

$$\mathbf{d}^i = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}^i)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^i) \quad (\text{B.57})$$

$$\lambda^i = 1 \quad (\text{B.58})$$

O método apresenta uma convergência muito rápida quando se aproxima da solução pois, nessa região, a função é aproximadamente quadrática. Em regiões ainda distantes da solução, é mais conveniente utilizar

$$\lambda^i = \min_{\lambda} \mathbf{f}(\mathbf{x}^i - \lambda \mathbf{d}^i) \quad (\text{B.59})$$

Exemplo B.7 Considere a minimização da função objetivo

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 25x_2^2$$

a partir de um ponto $\mathbf{x}^0 = [2 \ 2]^T$. O gradiente e matriz Hessiana calculados em \mathbf{x}^0 são dados por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 50x_2 \end{bmatrix}; \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}$$

Aplicando o algoritmo de Newton temos

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como a função objetivo é quadrática, o processo de minimização converge em um passo.

B.5 Métodos de Solução do PPNL com Restrições

B.5.1 Método das Penalidades

Neste método, o PPNL com restrições de desigualdade é transformado em uma seqüência de problemas sem restrições através da adição de termos à função objetivo, os quais *penalizam* soluções que não satisfazem as restrições.

Existem duas classes de métodos de penalidades:

- Penalidades Exteriores;
- Penalidades Interiores ou Barreiras.

Esses dois métodos são exemplificados na Figura B.11.

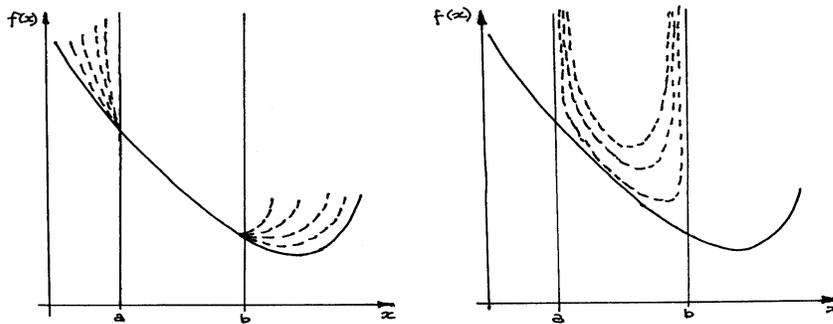


Figura B.11: Penalidades exteriores e interiores

Penalidades Exteriores

Para o exemplo da Figura B.11 (esquerda)

$$\mathcal{F}(x) = f(x) + \omega p(x) \quad (\text{B.60})$$

onde

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [a, b] \\ (x - a)^2 & \text{se } x < a \\ (x - b)^2 & \text{se } x > b \end{cases}$$

e ω é uma ponderação.

No caso geral

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{np} \omega_i p_i(\mathbf{x}) \quad (\text{B.61})$$

$$p_i(\mathbf{x}) = \min [0, h_i(p_i(\mathbf{x}))]^2 \quad (\text{B.62})$$

Penalidades Interiores ou Barreira Logaritmica

Para o exemplo da Figura B.11 (direita)

$$\mathcal{F}(x) = f(x) - \mu [\ln(x - a) + \ln(-x + b)] \quad (\text{B.63})$$

onde μ é o parâmetro barreira.

Apêndice C

Programação Linear

A Programação Linear (PL) é uma das técnicas de otimização mais utilizadas na solução de problemas de alocação de recursos, otimização de estratégias, etc. Neste apêndice serão introduzidas as noções básicas relacionadas à formulação e solução de problemas de PL assim como algumas interpretações econômicas do modelo de PL.

C.1 O Problema de Programação Linear

O problema de PL tem como objetivo encontrar um conjunto de valores das variáveis de decisão que maximizem (ou minimizem) o valor de uma função linear, sujeito a um conjunto de restrições representadas por equações ou inequações lineares nessas mesmas variáveis. Esse problema pode ser representado por

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{array} \quad (\text{C.1})$$

Em aplicações associadas a problemas de produção, a função objetivo z representa a renda obtida com a venda de quantidades x_1, x_2, \dots, x_n de n produtos, com preços unitários c_1, c_2, \dots, c_n , respectivamente. As restrições de desigualdade indicam que a fabricação dos produtos necessitam, no máximo, quantidades b_1, b_2, \dots, b_m de m recursos sendo que, cada um dos n produtos, necessitam de quantidades a_{ij} dos m recursos. As restrições de não-negatividade têm justificativa óbvia neste caso.

O problema de PL pode ser colocado em forma matricial como a seguir

$$\text{Max} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{C.2}$$

onde

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T;$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T;$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T;$$

A: matriz ($m \times n$) com elementos a_{ij} .

Exemplo C.1 *Através deste exemplo será dada uma interpretação gráfica do problema de PL e uma indicação das propriedades da solução do mesmo. Considere o problema em duas variáveis abaixo*

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

A Figura C.1 apresenta uma representação gráfica do problema acima. Nessa representação, a região interna ao polígono com vértices nos pontos A, B, C e D representa o conjunto de pontos satisfazendo as restrições, denominado Conjunto Viável, no qual está contida a solução do problema. A função objetivo é representada pelas retas pontilhadas para diferentes valores de z (curvas de nível).

A partir da observação da Figura C.1, é fácil concluir-se que a solução ótima do problema, isto é, o ponto do conjunto viável no qual a função objetivo atinge seu valor máximo, é o ponto D. Nesse ponto, a função objetivo assume o valor $z = 7$. Qualquer aumento incremental na função objetivo só pode ser alcançado por um deslocamento da solução para fora do conjunto viável. O ponto D é um ponto extremo (vértice) do conjunto viável o qual, como pode-se concluir facilmente, será sempre um polígono (politopo no caso geral). A propriedade da solução do problema de PL de se localizar em um ponto extremo (vértice do politopo) é geral e usada em algoritmos de solução do problema de PL.

C.2 Caracterização Algébrica

O problema de PL é geralmente estudado a partir do chamado Formato Padrão, o qual é dado a seguir

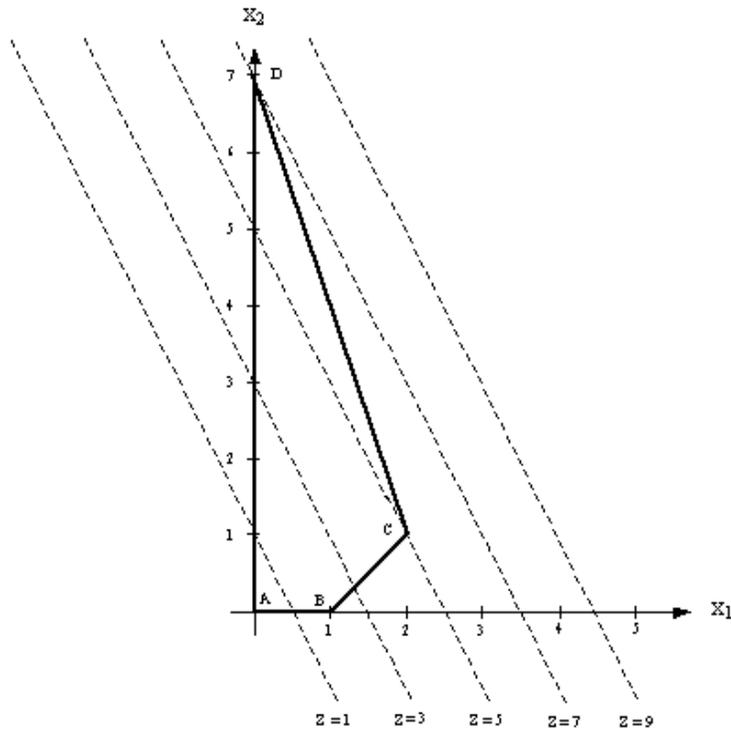


Figura C.1: Representação gráfica de um problema de PL

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{s.a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq 0
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Qualquer problema de PL pode ser colocado no formato padrão através da inclusão de variáveis artificiais (variáveis de folga). O caso de interesse prático é aquele no qual $m < n$, isto é, o sistema de equações é indeterminado, apresentando infinitas soluções. O problema de PL consiste em achar uma dessas soluções, com todas as componentes não-negativas, para a qual a função objetivo alcance o valor mínimo. A partir do formato padrão, é possível introduzir algumas definições que são utilizadas na caracterização da solução do PL. Algumas dessas definições são:

- *Matriz Base*: matriz não-singular formada por m colunas de A ;
- *Solução Básica*: é o vetor \mathbf{x}_b determinado escolhendo-se uma matriz base, fazendo-se as $n - m$ variáveis associadas às colunas de A não pertencentes à matriz base (variáveis não básicas) iguais a zero e

resolvendo-se o sistema de equações para as demais variáveis (variáveis básicas);

- *Solução Viável Básica (svb)*: é um solução básica onde todas as variáveis são não negativas.

Essas definições são mais facilmente visualizadas quando o sistema de equações (C.4) é colocado em sua *Forma Canônica*, através de operações elementares em suas equações, a qual é mostrada a seguir:

$$\begin{array}{rcccc}
 x_1 & & + a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 x_2 & & + a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & \ddots & & & \vdots \\
 & & x_m & + a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{mn}x_n & = b'_m
 \end{array} \tag{C.4}$$

e a *Forma Canônica Aumentada* pela introdução da equação correspondente à função objetivo

$$\begin{array}{rcccc}
 x_1 & & + a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 x_2 & & + a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & \ddots & & & \vdots \\
 & & x_m & + a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a'_{mn}x_n & = b'_m \\
 -z & & + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \cdots + c'_n x_n & = & b'_z
 \end{array} \tag{C.5}$$

Os pontos extremos do conjunto viável são as soluções viáveis básicas como definidas acima. Portanto, é possível encontrar a solução do problema de PL comparando-se os valores da função objetivo correspondentes a essas soluções. Entretanto, o número de soluções viáveis básicas é muito elevado¹ e tornaria esse procedimento inviável em problemas com as dimensões encontradas na prática. Por outro lado, é também possível demonstrar que a forma canônica aumentada, correspondente à solução ótima do problema, apresenta a seguinte propriedade:

$$c'_j \geq 0, \quad j = m + 1, \dots, n \tag{C.6}$$

As propriedades acima descritas podem ser utilizadas para desenvolver métodos de solução do problema de PL entre os quais se destaca o *Método Simplex*, o qual será apresentado na seção seguinte.

Exemplo C.2 *O problema de PL mostrado no Exemplo C.1 pode ser colocado no formato padrão através da introdução de duas variáveis de folga (x_3*

¹Em um problema de PL na forma padrão, com n variáveis e m restrições de igualdade, o número de soluções básicas é dado por $n!/(n-m)!m!$. Muitas dessas soluções não são viáveis (pelo menos um $x_i < 0$) porém, se um processo exaustivo de busca for utilizado, todas elas devem ser computadas.

e x_4) e da multiplicação da função objetivo por -1 (minimização). Desta forma, o problema passa ser escrito como

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -z = -2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.a} & x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4 \end{array}$$

Uma forma canônica aumentada óbvia do problema é dada por

$$\begin{array}{ll} x_3 & x_1 - x_2 = 1 \\ x_4 & 3x_1 + x_2 = 7 \\ z & -2x_1 - x_2 = 0 \end{array}$$

e a solução básica viável associada a essa forma canônica é $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 7$ e $z = 0$. Esta solução não é a solução ótima pois existem coeficientes $c'_j < 0$. Na Figura C.1 esta solução corresponde ao vértice A. Na busca pela solução ótima, deve-se efetuar uma troca de base, ou seja, alguma variável básica (x_3 ou x_4) deve ser trocada por uma das variáveis não básicas (x_1 ou x_2). Quais devem ser as variáveis escolhidas para a troca de base? A variável escolhida para entrar na base é aquela que produz o maior decréscimo na função objetivo, ou seja, aquela correspondente ao mais negativo coeficiente c' . No exemplo, a variável escolhida é x_1 .

A variável escolhida para sair da base deve ser tal que, ao atingir o valor nulo, sejam garantidos valores não negativos para as variáveis básicas após a mudança de base. Essa mudança será realizada através de operações elementares no sistema de equações de forma a colocá-lo em outra forma canônica aumentada, tal que tenha coeficiente unitário em uma das equações e nulo nas demais. Esta operação é chamada de pivoteamento² e produzirá modificações nas variáveis básicas como a seguir:

$$\begin{array}{l} x_3 = b'_3 - a'_{31}x_1 = 1 - x_1 \\ x_4 = b'_4 - a'_{41}x_1 = 7 - 3x_1 \end{array}$$

O maior valor que x_1 pode assumir, sem que x_3 ou x_4 se torne negativo, é $x_1 = 1$. Por essa razão, a variável escolhida para deixar a base é x_3 . De forma geral, deve-se escolher para deixar a base a variável básica cuja relação b'_r/a'_{rs} seja mínima para os $a'_{is} > 0$, onde r representa a variável candidata a deixar a base e s a variável que se tornará básica. Se um dos $a'_{is} < 0$, x_s poderá ser aumentada indefinidamente sem causar a perda da não-negatividade da correspondente variável básica. Isto indica uma Solução

²A operação de pivoteamento em relação ao termo $a_{rs}x_s$ consiste em tornar unitário o coeficiente de x_s na r -ésima equação e nulo os coeficientes da mesma variável nas demais equações. Esse processo é realizada através de operações elementares nas equações da forma canônica aumentada.

Ilimitada. Por outro lado, se algum $a'_{is} = 0$, podemos mudar a base sem alterar a solução. Este caso é conhecido como uma Solução Degenerada e sua ocorrência é pouco freqüente em problema reais.

A nova forma canônica aumentada, após vários passos, tem o seguinte aspecto

$$\begin{array}{rcl} x_3 & & +4x_1 + x_4 = 8 \\ x_2 & & +3x_1 + x_4 = 7 \\ z & + & x_1 + x_4 = 7 \end{array}$$

Como todos os $c'_j > 0$, esta forma canônica corresponde à solução ótima, com as variáveis assumindo os valores $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8$ e $z = 7$. Na Figura C.1 esta solução corresponde ao vértice D.

C.3 O Método Simplex

As propriedades da solução do problema de PL introduzidas na seção anterior, e as idéias ilustradas no Exemplo C.2, formam as bases do Método Simplex. Esse método foi introduzido por G.B. Dantzig na década de quarenta. Métodos mais eficientes de solução do problema de PL foram introduzidos recentemente³, porém o método Simplex e suas variantes, continuam a ser utilizado em muitos códigos usados comercialmente. A seguir é apresentado o procedimento do método Simplex de forma sintetizada. Esse procedimento inicia-se a partir de uma forma canônica viável aumentada⁴.

Procedimento do Método Simplex

1. Se pelo menos um $c'_j \leq 0$ (e o correspondente $b'_j > 0$), então é possível obter uma outra svb com menor valor de z .
2. Se mais de um $c'_j \leq 0$, a variável (x_s) a ser aumentada (entrar na base) deve ser escolhida pela regra

$$c'_s = \min_j (c'_j < 0)$$

3. A variável que deixará a base deve ser escolhida observando-se que as variáveis básicas serão modificadas de acordo com as relações

$$x_1 = b'_1 - a'_{1s}x_s$$

³Os mais importantes desses métodos são aqueles incluídos na categoria de Métodos dos Pontos Interiores, os quais tiveram sua origem em um método proposto por N. Karmarkar em 1984.

⁴Caso uma svb inicial não seja óbvia, é possível obter a svb inicial utilizando o próprio algoritmo Simplex. Esse procedimento é normalmente referido como a Fase I do Simplex enquanto a busca da solução ótima propriamente dita é chamada de Fase II.

$$\begin{aligned}
 x_2 &= b'_2 - a'_{2s}x_s \\
 &\vdots \\
 x_m &= b'_m - a'_{ms}x_s \\
 z &= b'_z - c'_s x_s
 \end{aligned}$$

4. Aumentando o valor de (x_s) , o valor de z diminui. Entretanto, essa diminuição é limitada pelas restrições de não-negatividade nas variáveis. No caso de $a'_{is} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, x_s pode se tornar tão grande quanto se queira, o que indica uma *solução ilimitada*.
5. Se pelo menos um $a'_{is} > 0$, a variável a deixar a base (x_r) é escolhida de acordo com a seguinte regra

$$x_s^* = \frac{b'_r}{a'_{rs}} = \min_{a'_{is} > 0} \left[\frac{b'_i}{a'_{is}} \right]$$

onde x_s^* é o valor da nova variável básica.

6. A nova forma canônica aumentada, com x_r substituído por x_s no conjunto de variáveis básicas, é obtida realizando-se um operação de pivoteamento no termo $a'_{rs}x_s$.

Na Figura C.2 é apresentado um fluxograma do Método Simplex.

C.4 Forma Matricial do Método Simplex

Suponha as variáveis do problema agrupadas em um vetor de variáveis básicas (x_B) e não-básicas (x_D) e a matriz a A particionada, respectivamente, como a seguir

$$A = [B \ D] \tag{C.7}$$

onde B é matriz base $(m \times m)$, com colunas correspondentes às variáveis básicas, e D é uma matriz $((n - m) \times m)$ com colunas correspondentes às variáveis não básicas. Então, o problema de PL no formato padrão pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= c_B^T x_B + c_D^T x_D \\
 \text{s.a } & Bx_B + Dx_D = b \\
 & x_B \geq 0, x_D \geq 0
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

A solução básica, a qual é assumida ser também viável, correspondente à matriz base B é dada por $x = [x_b^T 0^T]^T$ onde $x_B = B^{-1}b$. De um modo geral,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D \tag{C.9}$$

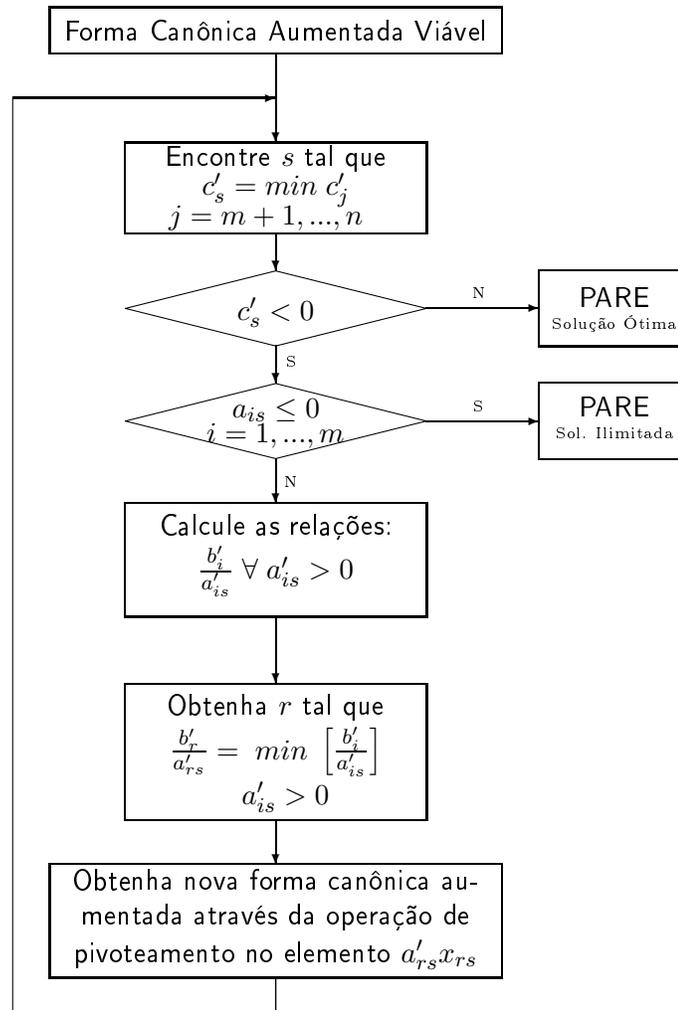


Figura C.2: Fluxograma do Método Simplex

a qual, substituída em (B.8) produz

$$\begin{aligned} z &= c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Dx_D) + c_D^T x_D \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_D^T - c_B^T B^{-1}D)x_D \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

As componentes do vetor $r = c_D^T - c_B^T B^{-1}D$ são os chamados *Custos Relativos* e o produto $\pi = c_B^T B^{-1}$ são chamados de *Multiplicadores Simplex*.

Essa forma matricial pode ser compactada no chamado *Tableau*. O tableau inicial é dados por

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & D & b \\ c_B^T & c_D^T & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

o qual não está na forma canônica e não corresponde a uma das soluções do procedimento Simplex. Uma forma canônica de tableau pode ser obtida através de operações elementares através das quais a matriz B se transforma na matriz identidade. Em forma matricial, a forma final é dada por

$$T = \begin{bmatrix} I & B^{-1}D & B^{-1}b \\ 0 & c_D^T - c_B^T B^{-1}D & c_B^T B^{-1}b \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Outros pontos extremos do conjunto viável podem ser obtidos através de trocas de variáveis (básicas e não-básicas) e operações de pivoteamento produzindo um novo tableau com o mesmo aspecto daquele mostrado em (C.4).

Exemplo C.3 *A solução do problema de PL apresentada no Exemplo C.2 é reproduzido, na forma matricial a seguir. A primeira forma canônica é dada por*

$$\begin{array}{cccc|cc} x_3 & x_4 & x_1 & x_3 & b & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & & \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & & \\ \hline 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & & \end{array}$$

Após a troca de variáveis básicas (x_3 por x_2), o novo tableau é dado por

$$\begin{array}{cccc|cc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & b & & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Para colocar o novo tableau em sua forma canônica, é necessário efetuar as operações indicadas em (C.4) as quais produzem a forma canônica do novo tableau. Essas operações são

$$c_D^T - c_B^T B^{-1}D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_B^T B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 \end{bmatrix} = 7$$

e produzem o tableau mostrado a seguir

$$\begin{array}{cccc|cccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & b & & & & \\ \hline 1 & 0 & 4 & 1 & 8 & & & & \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & & & & \end{array}$$

A partir da formulação matricial do procedimento de solução do problema de PL pelo método Simplex, é possível estabelecer um novo procedimento para solução dos problemas de PL, conhecido como Método Simplex Revisado o qual é apresentado a seguir.

Método Simplex Revisado

1. Compute o vetor linha $\lambda = c_B B^{-1}$ e o vetor de custos reduzidos $r = C_D - \lambda D$;
2. Se $r \geq 0$, PARE: a solução atual é ótima. Senão, se r_i é o mais negativo componente de r , então escolha a coluna i de D para entrar na base. Denote essa coluna por u ;
3. Compute $v = B^{-1}u$;
4. Calcule as relações de $B^{-1}b$ com $B^{-1}u$, admitindo apenas as componentes positivas de $B^{-1}u$. Se não existem componentes positivas, o custo mínimo é $-\infty$; se a menor relação ocorre para a componente k , então a coluna k de B sai da base;
5. Atualize a matriz B (ou B^{-1}) e a solução $x = B^{-1}b$. Retorne ao passo 1.

Diferentes implementações do método Simplex Revisado podem ser obtidas dependendo da forma de implementação dos passos 1, 3 e 5 do procedimento acima. Nesses passos é necessário efetuar-se operações com a inversa da matriz base (B). Essas operações podem ser realizadas a partir do

- Cálculo da inversa explícita B^{-1} ;
- Representação de B^{-1} na forma da inversa na forma de produto;
- Fatoração LU de B , ou seja, $B = LU$.

C.5 Dualidade

Associado a cada problema de PL existe um outro problema de PL conhecido como *Problema Dual*. Por analogia, o problema original é denominado *Problema Primal*. O problema dual apresenta as seguintes características: o objetivo do dual é o reverso do primal (maximização \times minimização); as dimensões do problema dual são as transpostas do primal (m variáveis e n restrições); o sentido das inequações são inversos (\leq é trocado por \geq); os coeficientes da função objetivo do dual são os recursos do primal; a exigência de não negatividade das variáveis é mantida no problema dual. Por exemplo, o problema dual daquele apresentado em (C.1) é dada por

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & w = b_1\pi_1 + b_2\pi_2 + \cdots + b_m\pi_m \\
 \text{sujeito a} & a_{11}\pi_1 + a_{21}\pi_2 + \cdots + a_{m1}\pi_m \geq c_1 \\
 & a_{12}\pi_1 + a_{22}\pi_2 + \cdots + a_{m2}\pi_m \geq c_2 \\
 & \dots\dots\dots \\
 & a_{1n}\pi_1 + a_{2n}\pi_2 + \cdots + a_{mn}\pi_m \geq c_n \\
 & \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, m
 \end{array} \quad (\text{C.13})$$

Os problemas primal e dual têm as seguintes propriedades [19]:

- Se o problema primal ou o problema dual tem uma solução ótima, então o outro (dual ou primal) também tem e a solução é a mesma para ambos os problemas, ou seja, o máximo de z é igual ao mínimo de w . Por outro lado, se não há solução ótima, duas possibilidades podem ocorrer: ou ambos os conjuntos viáveis são vazios ou um deles é vazio e outro ilimitado.
- As variáveis do problema dual ($\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$) correspondem aos multiplicadores simplex do problema primal ($\mathbf{c}_B^T B^{-1}$). Por essa razão, o mesmo símbolo (π) foi escolhido para representar essas grandezas.

Exemplo C.4 O problema dual correspondente ao problema de PL apresentado no exemplo C.1 é dado por

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & w = \pi_1 + 7\pi_2 \\
 \text{s.a} & \pi_1 + 3\pi_2 \geq 2 \\
 & -\pi_1 + \pi_2 \geq 1 \\
 & \pi_1 \geq 0 \\
 & \pi_2 \geq 0
 \end{array}$$

A solução do problema acima é $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 1$ e $w = 7$. Como pode ser observado, o valor da função objetivo é o mesmo do problema primal.

C.6 Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade indica como o valor da função objetivo z , obtida na solução de um problema de PL, varia quando existem variações pequenas no vetor de custos (c) ou no termo independente das restrições de igualdade (b). A exigência de variações pequenas é para garantir que a solução ótima continue localizada no mesmo ponto extremo do conjunto viável. O valor da função objetivo correspondente à solução ótima é dada por

$$z^* = \mathbf{c}_B^T [B^*]^{-1} \mathbf{b} = \pi \quad (\text{C.14})$$

Uma variação $\Delta \mathbf{b}$ produz uma alteração $\pi^* \Delta \mathbf{b}$ em z . Os multiplicadores Simplex, ou a solução do problema dual, π^* são os coeficientes de sensibilidade da variação do valor da função objetivo como resultado de variações no termo independente \mathbf{b} , isto é,

$$\pi = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{c}_B^T B^{-1} \quad (\text{C.15})$$

Os multiplicadores Simplex são os *Multiplicadores de Lagrange* associados às restrições de igualdade da formulação padrão do problema de PL. Em aplicações econômicas do modelo de PL, esses multiplicadores estão associados aos *Custos Marginais* de produção.

Bibliografia

- [1] V. Ajjarapu and C. Christy. The continuation power flow: A tool for steady state voltage stability analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(1):416–423, February 1992.
- [2] O. Alsac and B. Stott. Optimal load flow with steady-state security. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 93:745–751, May/June 1974.
- [3] P.M. Anderson. *Analysis of Faulted Power System*. Iowa State University Press, Ames, 1973.
- [4] J. Arrilaga, C.P. Arnold, and B.J. Harker. *Computer Modelling of Electrical Power Systems*. John Wiley, London, 1983.
- [5] R.C. Burchett, H.H. Happ, and K. Wirgau. Large scale optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 101:3722–3732, October 1982.
- [6] C.A. Canizares and F.L. Alvarado. Point of collapse and continuation methods for large ac/dc systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 8(1):1–8, February 1993.
- [7] J. Carpentier. Contribution à l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Societe Française des Electriciens*, vol B3:431–447, 1962.
- [8] R.B. Christie, B.F. Wollenberg, and I. Wangestein. Transmission management in the deregulated environment. *Proceedings of the IEEE*, 88(2):170–195, February 2000.
- [9] T. Van Cutsem, Y. Jacquemart, J.-N. Marquet, and P. Pruvot. A comprehensive analysis of mid-term voltage stability. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1173–1182, August 1995.
- [10] D.I.Sun, B.T. Ashley, B.J. Brewer, B.A. Hughes, and W.F. Tinney. Optimal power flow by newton approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 103(10):2864–2880, October 1984.

- [11] H.W. Dommel and W.F. Tinney. Optimal power flow solutions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 87(10):1876–1886, October 1968.
- [12] I.S. Duff, A.M. Erisman, and J.K. Reid. *Direct Methods for Sparse Matrices*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [13] W.W. Price et al. Standard load models for power flow and dynamic performance simulation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3):1302–1313, August 1995.
- [14] P.E. Gill, W. Murray, and M.H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- [15] G. Golub and J.M. Ortega. *Scientific Computing: An Introduction with Parallel Computing*. Academic Press, Boston, 1993.
- [16] S. Granville. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):136–146, February 1994.
- [17] W.D. Stevenson Jr. *Elements of Power System Analysis*. McGraw-Hill, New York, fourth edition, 1982.
- [18] P. Kundur. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, New York, 1994.
- [19] D.G. Luenberger. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Menlo Park, 1973.
- [20] A. Monticelli. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*. Editora Edgar Blücher Ltda., São Paulo, 1983.
- [21] A. Monticelli and A. Garcia. *Introdução a Sistemas de Energia Elétrica*. Editora da Unicamp, 1999.
- [22] J.M. Ortega. *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*. Plenum Press, New York, 1988.
- [23] B. Stott. Review of load flow calculation methods. *Proceedings of the IEEE*, 62, 1974.
- [24] B. Stott, O. Alsac, and A. Monticelli. Security analysis and optimization. *Proceedings of the IEEE*, 75(12):1623–1644, December 1987.
- [25] B. Stott and E. Hobson. Power system security control calculations using linear programming - parts I and II. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 87:1876–1886, October 1978.
- [26] C.W. Taylor. *Power System Voltage Stability*. McGraw-Hill, New York, 1994.

- [27] W.F. Tinney and C.E. Hart. Power flow solutions by newton' method. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 86(10):1876–1886, October 1967.
- [28] W.F. Tinney and J.W. Walker. Direct solutions of sparse networks by optimally ordered triangular factorization. *Proceedings of the IEEE*, 55:1801–1809, 1967.
- [29] H.A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2), March 1992.
- [30] S.J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM, Philadelphia, 1997.
- [31] Y.-C. Wu, A.S. Debs, and R.E. Marsten. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883, May 1994.